Efectos del gas de ignición en la soldadura por arco con cátodo hueco

Pablo Solana, ETS Ingenieros Industriales de Madrid

Trabajo desarrollado para la Fundación Domingo Martínez

Resumen

El objetivo del trabajo llevado a cabo ha sido el de formular un modelo estacionario para la soldadura por arco asistida por láser con un cátodo hueco. Se ha analizado la distribución de temperaturas en el metal del cátodo, el proceso de calentamiento del gas dentro del mismo, el comportamiento del plasma de la columna del arco y la interacción con el metal del ánodo. La aproximación al problema ha sido básicamente analítica, de manera que ha sido necesario hacer un número de simplificaciones que se comentan en cada caso. La formulación analítica ha permitido estudiar paramétricamente el comportamiento de la soldadura para diferentes tipos de gases con relativa sencillez. A lo largo del proceso, han surgido cuestiones (comportamiento dinámico, problema inverso de mediciones) ajenas en principio a la propuesta, que se ha considerado interesante incluir en la Memoria como líneas de futuro desarrollo.

Índice

1 Motivación y objetivos del estudio 4

1.1 Principios básicos 4

1.2 Soldadura hiperbárica 6

1.2.1 Voltaje 6

1.2.2 Longitud del arco 7

1.2.3 Corriente 7

1.2.4 Velocidad de soldadura 8

1.2.5 Gasto de plasma 8

1.2.6 Tipo de gas empleado 8

1.2.7 Erosión del cátodo 9

1.3 Objetivos del estudio 9

2 Modelo del cátodo hueco **12**

2.1 Introducción 12

2.2 Movimiento del gas dentro del cátodo 13

2.2.1 El flujo compresible 14

2.2.2 Ignición del gas neutro 17

2.2.3 Densidad iónica 19

2.3 Transferencia de calor dentro del cátodo 20

2.4 Discusión del modelo 24

2.4.1 Mapas de temperaturas y emisión de electrones 24

2.4.2 Trabajo futuro 26
2.5 Resumen 34

3 Modelos del arco de soldadura **36**
3.1 Resumen del estado del arte 36
3.2 Modelo para velocidades bajas 37
3.2.1 Ecuaciones y resolución 37
3.2.2 Discusión 39
3.3 Modelo para velocidades altas 42
3.3.1 Ecuaciones y resolución 42
3.3.2 Discusión 44

4 Modelo de interacción con el ánodo **51**
4.1 Modelo del calentamiento del ánodo 51
4.2 Modelo de interacción electromagnética 54

5 Resultados y conclusiones **57**
5.1 Cátodo hueco 57
5.1.1 Velocidades y temperaturas 57
5.1.2 Ionización y flujo 61
5.1.3 Emisión electrónica 63
5.1.4 Resumen 67
5.2 Arco de soldadura y baño fundido 67
5.2.1 Mapas para el Argón 68
5.2.2 Mapas para el Helio 70
5.3 Conclusiones 72

6 Referencias **75**

7 Programas de cálculo **77**

7.1 Calentamiento metal del cátodo 77

7.2 Flujo del gas en el interior del cátodo 81

7.3 Modelos del arco 85

7.3.1 Modelo a bajas velocidades 85

7.3.2 Modelo de arco a altas velocidades 86

1. Motivación y objetivos del estudio

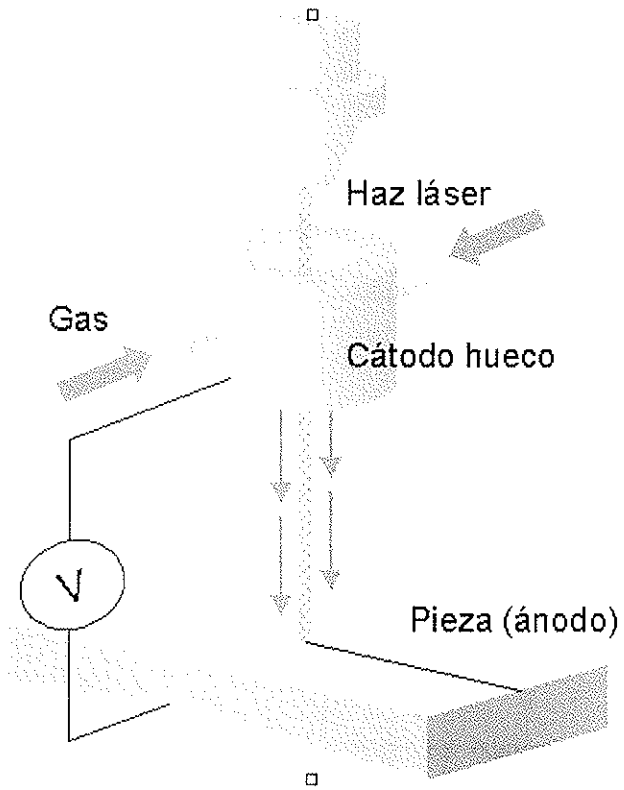
1.1 Principios básicos

La soldadura por arco de plasma es, fundamentalmente, una técnica versátil para la mayoría de los materiales procesados en la industria. Funciona de manera estable en un amplio margen de condiciones ambientales, así como para un abanico de potenciales y corrientes efectivos del arco.

El principio básico de funcionamiento es como sigue. Se hace circular un gas, en dirección perpendicular a la pieza a soldar (ánodo). El gas rodea al cátodo aguas arriba e iteracciona con él de manera crucial: la región que rodea al cátodo está sujeta a un elevado campo eléctrico que, en los instantes iniciales, es el encargado de hacer vencer a los electrones del metal del cátodo el potencial que los mantiene confinados. Estos electrones son acelerados aguas abajo, y colisionan con las partículas neutras del gas, ionizándolas. Los iones, en virtud de la diferencia de potencial, se aceleran hacia el cátodo y colisionan con su pared, generando un incremento local de la temperatura. Este aumento de la energía promedio en las paredes del cátodo es responsable de la liberación adicional de electrones hacia la pieza (efecto termoiónico). Se alcanza un estado estacionario en el cual el flujo de iones/electrones se mantiene constante. A una cierta distancia del cátodo, iones y electrones se recombinan, decelerándose y aumentando así la temperatura del plasma. En el estado estacionario, esta temperatura puede alcanzar los 19000 K. Es este calentamiento del gas (convertido en plasma) la principal fuente de calor que, por conducción, se transmite a la pieza. La recombinación de electrones en la pieza también contribuye al calentamiento, aunque en menor medida. En el caso de soldadura asistida por láser, la intensidad del haz contribuye asimismo al fundido (y ulterior vaporización, si es el caso) del ánodo.

La presencia de plasma se favorece habitualmente con una disposición tal de la antorcha de soldadura que genere una constricción en las inmediaciones del cátodo. Esta reducción de la sección horizontal de circulación del gas aumenta la probabilidad de colisiones con los primeros electrones generados en el cátodo, favoreciendo así la ionización del gas.

El modelo que se presenta en esta memoria no obedece a una configuración estándar en la soldadura por arco, en tanto usa un cátodo cilíndrico hueco (en oposición a los cátodos cónicos tradicionales) con un haz láser coaxial que, además, interacciona con el gas circulante por el interior del cátodo. No se supone ninguna restricción del flujo de gas fuera del cátodo, y se demuestra que la sóla acción del haz láser, en determinadas condiciones, es capaz de generar plasma. La Figura 1 ilustra, esquemáticamente, el proceso que se modeliza.



La versatilidad y la flexibilidad de la soldadura por arco tiene su contrapeso en la dificultad de modelizar adecuadamente su comportamiento. Tener en cuenta la formación de plasma incrementa la complejidad de la formulación de los balances de energía, al tener que modelizar (aun en estado de cuasi-equilibrio) el comportamiento de las especies en las proximidades del cátodo, crucial para la determinación del flujo electrónico y el nivel de calentamiento de las paredes del cátodo. Además, las soluciones de las ecuaciones involucradas dependen mucho de las condiciones de contorno que se impongan, en

ocasiones difíciles de determinar experimentalmente.

Por todos estos motivos, debe prestarse especial atención a las simplificaciones que se puedan introducir en las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la soldadura por arco, especialmente si se añade una fuente láser y se adopta el uso de un cátodo hueco.

1.2 Soldadura hiperbárica

La generación de un arco de plasma se propuso como una potencial herramienta útil de soldadura en regímenes hiperbáricos a finales de los años 70, dada su supuesta mayor estabilidad (en comparación con los arcos libres). Sin embargo, las aplicaciones reales en la industria (salvo excepciones en la soldadura de tuberías bajo el agua en plataformas petrolíferas) han sidoi más bien escasas. Las razones estriban en la dificultad de controlar un proceso con una gran cantidad de parámetros, así como en la falta de relaciones claras entre los mismos y el incremento de presión ambiente.

Sin embargo, resulta clara la ventaja de la soldadura por arco de plasma en términos de estabilidad. Los arcos libres tienden a desprenderse con un aumento ligero de la presión ambiente, mientras que la constricción que genera la columna de plasma tiene un efecto estabilizador apreciable.

En el caso que nos ocupa, el plasma es generado en el interior de un cátodo hueco, y las mismas paredes interiores del cátodo actúan como elemento constrictor. Elementos adicionales (antorcha de soldadura con constricción que rodee a las paredes externas del cátodo) pueden ayudar a incrementar la estabilidad del proceso, aunque en el presente caso no se han tenido en cuenta.

A continuación se hace un resumen de los resultados experimentales más importantes que describen la variación de las magnitudes fundamentales con la presión ambiente.

1.2.1 Voltaje

La caída de potencial en el arco se incrementa con la raíz cuadrada de la presión ambiente. Si se tiene en cuenta el efecto de la longitud del arco l y el campo eléctrico (módulo) a 1 atmósfera, E_1, el voltaje del arco se puede

representar como

$$V = V_0 + E_1 l P^{1/2}$$

donde la constante V_0 da cuenta de la suma total de potenciales actuando sobre cátodo y ánodo. Esta caída de potencial en los electrodos es fuente de contradicciones: por un lado, existen grupos experimentales que afirman que V_0 es independiente de las condiciones de presión; otros señalan una cierta dependencia. En cualquier caso, ésta es suficientemente menor que la dependencia del voltaje del arco, y puede ser ignorada en la práctica.

La ley anterior resulta de utilidad cuando lo que se pretende es diseñar módulos de control de la soldadura en tiempo real: la medición de la longitud del arco y la presión ambiente pueden tomarse como señales de control del voltaje total a suministrar, todo ello con el objeto de favorecer la estabilidad de la soldadura.

1.2.2 Longitud del arco

La caída de potencial del arco crece linealmente con la longitud del mismo (como señala la fórmula anterior), y la eficiencia de la soldadura decrece con esta longitud del arco. La presión que el arco ejerce sobre la superficie del material a soldar decrece según la ley

$$P_a \propto l^{-9/10}$$

lo cual resulta de especial interés si se requiere un régimen de soldadura *.keyhole*[1].

Por otro lado, el reducir excesivamente la distancia entre el cátodo y la pieza aumenta el peligro de interacciones no deseadas entre los electrodos, o incluso regímenes de cortocircuito.

1.2.3 Corriente

Inicialmente, a intensidades de corriente bajas, el voltaje del arco decrece con la corriente. Esta tendencia se invierte para corrientes más grandes. El

[1] Este régimen de soldadura, de alta intensidad, favorece la vaporización de la pieza a soldar, generando un canal formado por gas y plasma (keyhole) que facilita la penetración en la pieza. El movimiento de la fuente hace que el canal se cierre y las piezas queden unidas por la piscina fundida que lo rodea.

punto de inflexión parece tener lugar a correientes menores a medida que la presión ambiental aumenta.

La densidad de corriente aumenta de manera significativa cuando la presión ambiente crece, lo que lleva asociado un incremento en la pérdidas por radiación del arco. Es típico el uso de filtros para poder tener una impresión visual del arco en las soldaduras a grandes profundidades.

1.2.4 Velocidad de soldadura

La estabilidad del arco de soldadura no se ve afectada de manera apreciable para los rangos de velocidades de soldadura industriales. En cualquier caso, el aumento de la velocidad de soldadura reduce la aportación de calor por unidad de tiempo sobre la pieza, lo cual se traduce en menores penetraciones de la zona fundida.

Si se pretende soldar en régimen de keyhole, el margen de las velocidades se reduce considerablemente, por el mismo motivo señalado antes de la reducción del aporte de potencia.

1.2.5 Gasto de plasma

La presión del arco crece inicialmente cuando se aumenta el gasto, para luego estabilizarse. Una posible explicación de este fenómeno es la limitación natural de masa entrante en el arco, por el siguiente motivo: las pertículas que constituyen la parte central del arco,a temperaturas muy elevadas, actúan como pantalla reflectora de las partículas de gas frías que se inyectan aguas arriba. El arco se comporta así como un sólido poroso, permitiendo que una fracción del gas neutro entre en el arco y se ionice, mientras que otra es desviada hacia la periferia del arco, formando una "cáscara" relativamente fría que contiene al arco caliente en su interior.

1.2.6 Tipo de gas empleado

El papel del tipo de gas no está estudiado en detalle. Por un lado, parece que la inclusión de helio en un gas de argón favorece la transferencia de calor a la pieza. Fenómenos de difusión en las mezclas de gases complican el comportamiento: los gases con mayor potencial de ionización, al mantenerse más densos, migran hacia el interior del arco (a menor densidad por efecto de su elevada temperatura).

El preesente etudio se centrará, una vez se formulen los modelos de cátodo y arco, en determinar los gases que favorecen la ignición y pueden indicar mayor estabilidad del arco.

1.2.7 Erosión del cátodo

La erosión aumenta con la presión ambiente, y de forma crítica con la intensidad de corriente. Esto resulta especialmente dañino para configuraciones troncocónicas del cátodo, en cuya punta se acumula de manera especial el calor.

La erosión se cree puede minimizarse con el uso de un cátodo hueco (geometría más resistente a la erosión). Es verdad que la emisión de electrones resulta, en principio, mucho más sencilla en cátodos troncocónicos. En cualquier caso, en el presente estudio la fuente principal de ionización será el haz láser, que compensa entonces la geometría (deficiente desde el punto de vista de la emisión) de los cátodos huecos.

1.3 Objetivos del estudio

Los cátodos huecos se usan con la idea de estabilizar la soldadura por arco. Un gas entra en el cátodo hueco y se ioniza a su paso por el interior del mismo, bien por efecto termoiónico, por efecto campo, por la acción de una fuente suplementaria de energía (un láser, por ejemplo) o por todas ellas.

La presencia de un haz láser de unas determinadas características, además de favorecer la ignición del gas, ayuda a fijar la raíz del arco al crear un camino ionizado hacia el ánodo. Se estudiará entonces el caso de un cátodo hueco sujeto a la incidencia de un láser y al flujo de un gas. El resultado de la soldadura será una compleja interrelación de los siguientes factores:

- Propiedades del material soldado (propiedades termo-ópticas y características metalúrgicas)
- Características del gas (potencial de ionización y densidad)
- Tensión y corriente aplicados al arco de soldadura.
- Condiciones ambientales.

Se trata de estudiar con detalle el efecto del gas que se utilice en la soldadura final de la pieza, así como en las posibles inestabilidades que se deriven del uso de uno u otro tipo de gas.

La aplicación de una diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo provoca la aparición de un campo eléctrico local de cierta intensidad (varios voltios en unas pocas micras), que tiende a aproximar electrones a la superficie interior del cátodo hueco. La acción del láser sobre el gas que circula en el interior es la de calentarlo y eventualmente ionizarlo, de manera que se generan especies iónicas. Dichas especies son aceleradas, en virtud de la diferencia de potencial, hacia las paredes internas del cátodo. El impacto de los iones sobre dicha superficie aumenta su temperatura y, como consecuencia, la emisión electrónica se ve favorecida. Se genera entonces una situación estacionaria en la que existe un delicado balance entre

- los iones incidentes generados por la ionización debida al láser
- los iones generados por la propia colisión de las especies neutras del gas con los electrones emergentes
- los electrones emergentes y su efecto de refrigeración de la pared interna del cátodo hueco
- el plasma en equilibrio local termodinámico que se forma a cierta distancia del cátodo, y
- la absorción de energía por la pieza a soldar.

El chorro de plasma formado entre el cátodo y el ánodo es intrínsecamente inestable. El haz láser puede, además de contribuir muy efectivamente a la ionización del gas, generar un camino ionizado hacia un punto fijo del ánodo, contribuyendo a estabilizar magnéticamente el arco de soldadura.

Los estudios experimentales realizados hasta la fecha con cátodos huecos se centran en la determinación por espectroscopía de las distribuciones de especies iónicas y electrónicas en su interior. Muchos de los trabajos teóricos recientes formulan modelos que reproduzcan efectivamente dichas distribuciones (Broglia *et al,* 1987; Stockhausen *et al,* 1996). En muchos casos, además, los experimentos se llevan a cabo en cámaras de vacío. Se echa en falta, sin embargo, un estudio simplificado pero integrado, válido para un amplio margen de condiciones ambientales, de todo el proceso de soldadura

por arco con cátodo hueco, ayudado de un láser. Los estudios parciales deben ser mejorados e integrados en un modelo con capacidad predictiva, pero adecuadamente simplificado.

Se presenta aquí un estudio del efecto que el gas que circula por el interior del cátodo hueco tiene sobre todo el arco de soldadura, su efectividad energética y su posible influencia en la inestabilidad del arco.

Abreviadamente, los pasos dados han sido:

1. Formular un modelo físico adecuado que tenga en cuenta la complejidad del proceso, pero facilite el uso de expresiones analíticas y evite así la aparición de inestabilidades numéricas, indeseables cuando se estudia un proceso que es, en sí, inestable físicamente. Se partirá de un modelo de cátodo (Solana *et al*, 1998) para adaptarlo a la nueva geometría, teniendo en cuenta la compresibilidad del gas en el interior del cátodo hueco. De esta manera, se quiere tener un modelo flexible del comportamiento del gas en el cátodo, y una estimación de las densidades iónica y electrónica generadas.

2. Adaptar el modelo de arco simplificado de Dowden *et al* (1994) para tener en cuenta el efecto del haz láser y la generación de un camino ionizado. Se propone cuantificar la influencia de la focalización del haz láser y del tipo de gas en la estabilidad del arco y en la cesión de energía a la pieza..

3. Determinar las dimensiones de la piscina fundida con un modelo desarrollado al efecto, en función del láser y gas empleados.

4. Generar un código de cálculo en un entorno Windows que permita seleccionar los parámetros de la soldadura con facilidad, y calcule eficientemente las distribuciones de energía en el arco de soldadura y en la pieza soldada.

El estudio se cree de importancia para tratar de controlar las inestabilidades del arco de soldadura en regímenes hiperbáricos. La importancia de este tipo de control se ha visto en años pasados refrendada por una considerable cantidad de medios puestos a disposición de empresas petroleras y centros de investigación por el British Council. Se considera que se está en disposición de aportar un modelo útil en la predicción de regímenes de soldadura factible.

2. Modelo del cátodo hueco

2.1 Introducción

El cálculo de la distribución de temperaturas en la superficie del cátodo debe tener en cuenta un gran número de efectos:

- Colisión de los iones sobre la superficie del mismo
- Efectos refrigerantes de la emisión de electrones desde esa misma superficie
- Efectos disipadores del gas que circula por el interior del cátodo

Tradicionalmente, el énfasis se ha puesto en resolver la ecuación de transferencia de calor con las condiciones de frontera pertinentes, para cátodos troncocónicos que operen en diferentes regímenes. La aproximación al problema ha sido bien numérica (Farmer *et al*, 1986; Farmer *et al*, 1988, Zhu *et al*, 1992, Ducharme *et al*, 1996, Blundell *et al*, 1997) o semianalítica (Solana *et al*, 1998). Los efectos del ángulo del cátodo han sido estudiados experimentalmente (Haidar *et al*, 1994) aunque los resultados varían dependiendo del grupo investigador (Sadek *et al*, 1990; Benilov *et al*, 1995). Modelos puramente analíticos, como el formulado por Dowden *et al* (1994), han permitido aislar ciertos efectos que, en la complejidad del cálculo numérico de resolución de las ecuaciones en derivadas parciales, pasan inadvertidos.

Los cátodos huecos se han estudiado, hasta ahora, para analizar el comportamiento de los iones y los electrones en el espacio hueco interior, para diferentes condiciones de frontera en sus paredes internas y externas. Biel *et al.* (1997) han estudiado las densidades atómicas y moleculares del hidrógeno en un plasma generado dentro de un cátodo hueco bajo la influencia de un campo magnético estacionario, desde un punto de vista puramente experimental. El plasma se genera fundamentalmente en las paredes del cátodo por emisión termiónica asistida por un fuerte campo eléctrico. La temperatura en las paredes (para un cátodo de tungsteno) resulta alrededor de los 2700 K, y es el resultado del balance entre la emisión termiónica, el bombardeo de iones,

radiación térmica y conducción de calor. Además de los electrones generados por colisiones iónicas con las paredes del cátodo, la densidad electrónica se puede aumentar con el uso de un láser (Broglia *et al.*, 1987; Stockhausen *et al.*, 1996). El láser induce fotoionización del gas dentro del cátodo hueco, generando pulsos de corriente (efecto optogalvánico).

Desde un punto de vista más matemático, el problema de un cilindro hueco sujeto a diferentes condiciones de frontera ha sido estudiado de manera bastante extensa (Carslaw and Jaeger, 1959). Además, el problema completamente tridimensional se ha tratado (como un problema de conducción de calor inverso) por algunos autores (Zheng *et al.*, 1996; Yang *et al.*, 1997). El planteamiento del problema inverso permite, a partir de la medición de las temperaturas en ciertos conjuntos de puntos de la superficie del cátodo, el mapa de temperaturas completo y las condiciones de contorno con cierta fiabilidad.

El objetivo del presente modelo es dar una descripción analítica del calentamiento del cátodo hueco, sujeto a la acción del impacto iónico y a efectos refrigerantes, que interacciona térmicamente con un gas compresible que circula por su interior. Se considera asimismo la acción de un haz láser focalizado en el interior del cátodo hueco, responsable de la ionización del gas. Los resultados de este modelo se utilizarán como condiciones de frontera para el modelo del arco de plasma.

2.2 Movimiento del gas dentro del cátodo

Se supone que el gas satisface las siguientes hipótesis:

1. La velocidad característica a lo largo del hueco del cátodo se supone significativamente mayor que la velocidad característica en dirección radial. Esto permite la formulación de un modelo unidimensional para el movimiento del gas dentro del cátodo.
2. Los efectos de la viscosidad son despreciables.
3. El gas es perfecto.
4. El movimiento es estacionario.

2.2.1 El flujo compresible

El gas se considera compresible, y el hueco del cátodo se supone que tiene una sección constante. El origen de coordenadas $l = 0$ se sitúa en la superficie plana del cátodo opuesta a la zona de impacto iónico. Las ecuaciones de conservación son:

$$\rho v = C \tag{2.1}$$

$$v\frac{dv}{dl} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dl} = -\frac{\lambda v^2}{2D} \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dl}\left(h + \frac{1}{2}v^2\right) = q_g \tag{2.3}$$

donde $\rho(l)$ es la densidad, $v(l)$ la velocidad, C una constante, $p(l)$ la presión, D el diámetro del hueco, λ el coeficiente de fricción, $h(l) = C_p T(l)$ la entalpía del gas y $q_g(l)$ la energía calorífica aportada al gas por unidad de masa y unidad de longitud. el valor de λ (adimensional) se puede aproximar como (Crespo, 1993)

$$\lambda = 0.316 \cdot Re^{-\frac{1}{4}} \tag{2.4}$$

La forma diferencial para la entropía es

$$Tds = dh - \frac{1}{\rho}dp \tag{2.5}$$

y la expresión de la entropía para un gas perfecto es

$$s = C_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) \tag{2.6}$$

donde C_p es el calor específico a volumen constante y $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. Usando las ecuaciones del gas perfecto, se obtiene la ecuación diferencial para la velocidad:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1 - M^2}{M^2}\right)\frac{dv^2}{dl} = \gamma\frac{\lambda v^2}{2D} + (\gamma - 1)\, q_g \tag{2.7}$$

con $M = \frac{v}{\sqrt{\gamma RT}}$ (R la constante de los gases).

La temperatura del gas se obtiene integrando la ecuiación:

$$C_p\frac{dT}{dl} + \frac{1}{2}\frac{d}{dl}\left(v^2\right) = q_g \tag{2.8}$$

cuya solución es

$$T(l) = T_0 + \frac{1}{C_p}\int_0^l q_g(\xi)d\xi - \frac{v^2}{2C_p} \tag{2.9}$$

con $T_0 = T(0)$.

El movimiento del gas dentro del hueco del cátodo queda determinado por la función $q_g(l)$. Si se coloca un haz láser de suficiente potencia en el eje del hueco del cátodo, a lo largo de la coordenada l, el gas circulante recibirá energía térmica básicamente de la fracción de la energía del láser que absorba. Se supone que las pérdidas por conducción hacia las paredes del cátodo en la dirección radial son despreciables.

Si la potencia del láser es P, y el coeficiente de absorción del plasma se representa por α, la energía calorífica promediada por unidad de longitud y por unidad de masa que se absorbe en un cátodo de longitud total L y radio interior a viene dada entonces por:

$$q_g = \frac{P\left(1 - e^{-\alpha L}\right)}{CL\pi a^2} \tag{2.10}$$

Con el objeto de analizar órdenes de magnitud en (2.7), se normaliza la velocidad con $\sqrt{\gamma RT}$ y la coordenada l con el diámetro D ($Z = l/D$) se tiene:

$$\frac{1}{2}\left(1 - M^2\right)\frac{dM^2}{dZ} = \gamma\frac{\lambda}{2}M^4 + \frac{(\gamma - 1)\,DM^2}{\gamma RT}q_g \tag{2.11}$$

El término $\gamma\frac{\lambda}{2}$ es mucho menor que 1(por ejemplo, para helio a 200 m s^{-1} es alrededor de0.03) de forma que el término $\gamma\frac{\lambda}{2}M^4$ se puede ignorar, especialmente para velocidades subsónicas.

Con esta simplificación, la ecuación (??) se puede integrar analíticamente para dar la siguiente solución implícita:

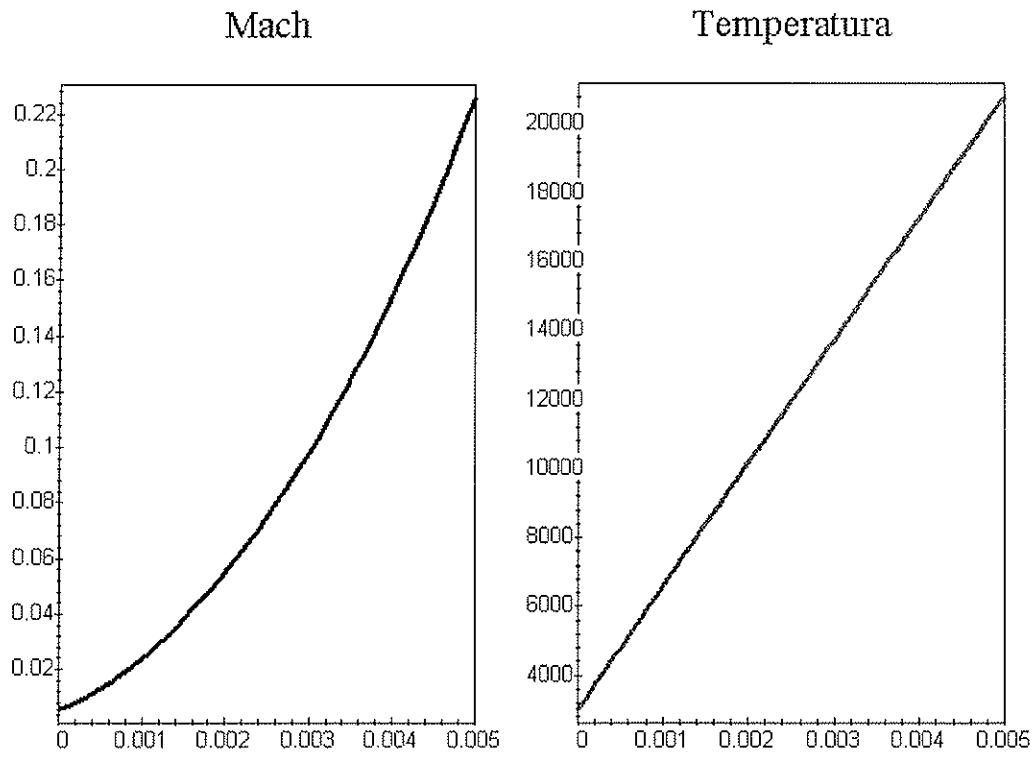
$$v^2(l) = \frac{2\left(\gamma - 1 - \frac{\gamma R}{2C_p}\right)}{2\left(\gamma - 1\right)\left(\gamma R + 1\right)}\left[S_0\left(v^2(l)\right)^{\frac{\gamma R}{2C_p(\gamma-1)}} - 2C_p\left(\gamma - 1\right)T_0 - 2q_g\left(\gamma - 1\right)l\right] \tag{2.12}$$

donde

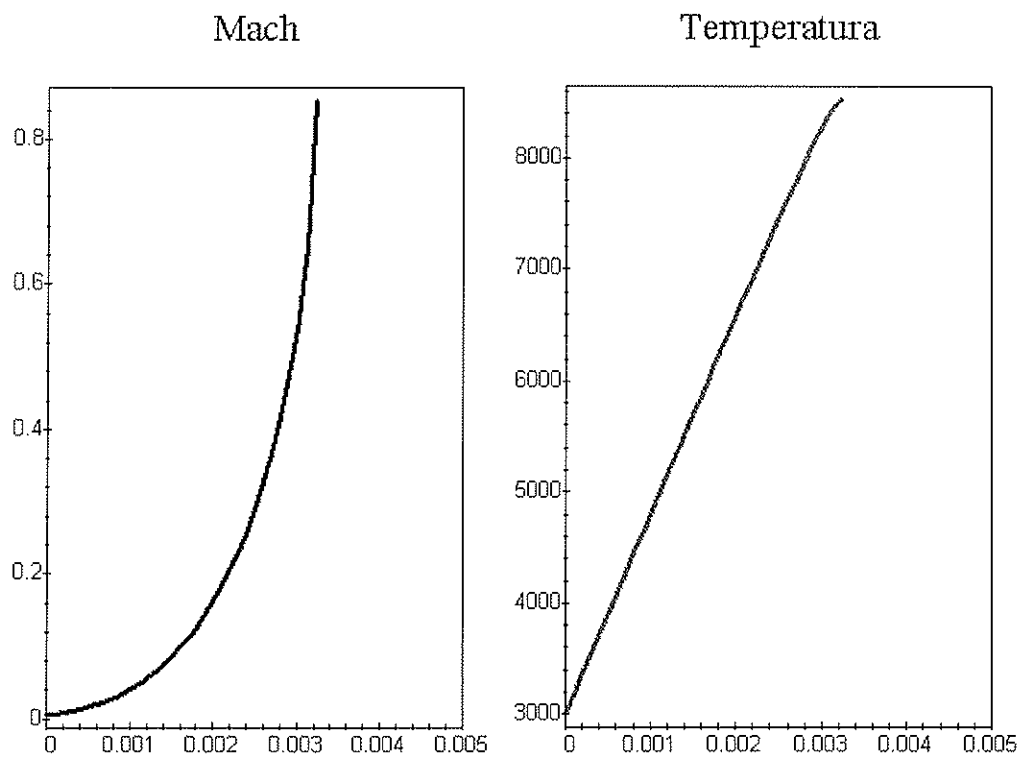
$$S_0 = -\left[2C_p\left(\gamma - 1\right)T_0 + \frac{2\left(\gamma - 1\right)\left(\gamma R + 1\right)}{2\left(\gamma - 1 - \frac{\gamma R}{2C_p}\right)}v_0^2\right]\left[\left(v_0^2\right)^{-\frac{\gamma R}{2C_p(\gamma-1)}}\right] \tag{2.13}$$

con $v_0 = v(0)$.

Las dos figuras siguientes muestran el número de Mach y la temperatura que alcanza el gas argón, introducido en el cátodo hueco a temperatura inicial de 3000 K.



El tipo de gas que se utiliza es crucial para garantizar la estabilidad de la soldadura. Si se usa, por ejemplo, un gas con el doble de capacidad calorífica que el argón, se obtienen las siguientes figuras:



esto es, el gas se acelera muy rápidamente (tiene más capacidad de asimilar el calor) y alcanza enseguida la velocidad local del sonido. La temperatura alcanza un máximo, en este caso no suficiente en absoluto como para presentar ionización significativa.

2.2.2 Ignición del gas neutro

Una vez que el gas alcanza una cierta temperatura, se ioniza de forma estable. Esta temperatura crítica está dictada por un balance absortivo-radiativo (Gouveia *et al*, 1994) que, en nuestro caso, toma la forma:

$$2\pi r_F \sigma \mathcal{R} T^4 = P\alpha \tag{2.14}$$

donde r_F es el radio de focalización del haz láser, σ es la constante de Stefan-Boltzmann, $\mathcal{R}$ es una medida adimensional del comportamiento de cuerpo negro del plasma y α es el coeficiente de absorción de temperatura dependiente de la temperatura. El valor de $\mathcal{R}$ viene dado por (Dowden *et al*,

1994)

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= 1 + \left(\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{2\upsilon^2}\right) e^{-2\upsilon} - \frac{1}{2\upsilon^2} \\ &\sim 2\upsilon \text{ as } \upsilon \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde

$$\upsilon = \frac{1}{4}\pi(n_i + n_n)d^2 a \tag{2.16}$$

con n_i la densidad iónica, n_n la densidad de átomos neutros y d el diámetro atómico del gas Asumiendo un grado de ionización Z igual a 1, el coeficiente de absorción α es

$$\alpha = \frac{Z^2 e^6 n_e^2}{6\pi\varepsilon_0 m_e^2 c\hbar\omega^3 \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^{1/2}} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \frac{1}{2} \ln\left(1 + \Lambda^2\right) \tag{2.17}$$

donde e es la carga del electrón, k_B la constante de Boltzmann , ε_0 la constante dieléctrica, ω_0 la frecuencia del láser y Λ tel parámetro del plasma:

$$\omega_0 = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}\right)^{1/2} \tag{2.18}$$

$$\Lambda = \frac{12\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 m_e}{e^3\omega_0} \left(\frac{k_B T}{m_e}\right)^{1/2} \frac{1}{Z} \left(\frac{Z}{1+Z}\right)^{1/2} \tag{2.19}$$

Las densidades de las especies están ligadas a través de la ecuación de Saha

$$\frac{n_e^2}{n_n} = \frac{K_p(T)}{k_B T} \tag{2.20}$$

$$K_p(T) = 2k_B T \frac{g_{0i}}{g_{0n}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{I}{k_B T}} \tag{2.21}$$

y la ley del gas perfecto

$$p = (2n_e + n_n)k_B T \tag{2.22}$$

con p la presión ambiente.

Para argón, la temperatura crítica que se necesita para mantener el plasma ionizado establemente es de 14.2 kK. La intensidad del láser requerida para

obtener como mínimo esta temperatura es de alrededor de $1.4 \cdot 10^{12}$ W m^{-2} (11 kW focalizados en un diámetro de 100 μm). La potencia crítica para mentener el plasma ionizado decrece a medida que la presión ambiente crece. Por ejemplo, se necesitan solo 4 kW focalizados en un diámetro de 100 μm para una presión ambiente de 2 bares.

2.2.3 Densidad iónica

Una vez que el gas se ioniza, su densidad viene dada por

$$\rho = m_n \left[\left(\frac{p + K_p(T)}{k_B T} \right) - \sqrt{\left(\frac{p + K_p(T)}{k_B T} \right) \left(\frac{p + K_p(T)}{k_B T} - \frac{p}{k_B T} \right)} \right] \tag{2.23}$$

con m_n la masa atómica del gas. La densidad iónica se obtiene entonces como función de la temperatura del gas

$$n_i = k_B T \left(\sqrt{1 + \frac{\rho(T)}{K_p(T)}} - 1 \right) \tag{2.24}$$

Suponiendo que cerca del cátodo existe una zona de carga neta (estructura de vaina-prevaina), los iones entran en la vaina (zona de carga espacial neta) con una velocidad que viene dada por el criterio de Bohm

$$v_B = \left(\frac{k_B T}{m_n} \right)^{1/2} \tag{2.25}$$

de forma que la corriente iónica se calcula de la forma

$$j_i = e n_i v_B \tag{2.26}$$

y el flujo de energía calorífica debido al impacto de los iones sobre la superficie del cátodo se puede expresar en la forma siguiente

$$q_i = j_i \left(\varphi + \frac{1}{e}(E_i - \Phi) \right) \tag{2.27}$$

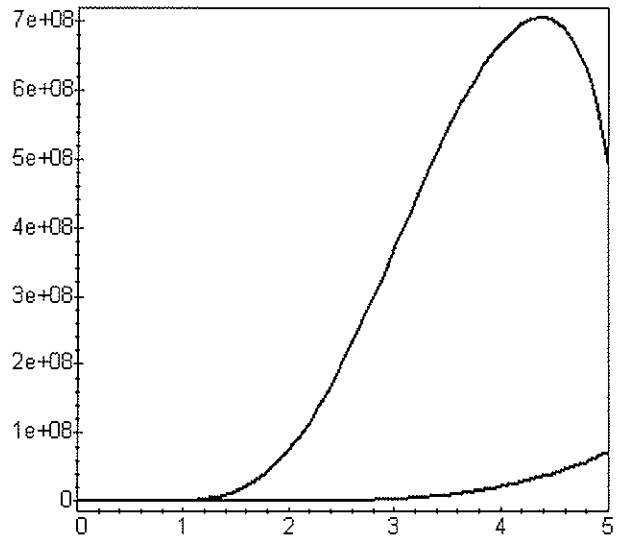
donde E_i y Φ son la energía de ionización y el potencial efectivo del metal, respectivamente. Los electrones liberados provocan un enfriamiento en las

paredes del cátodo, que viene dictado por la ley de Richardson asociada a la emisión termiónica:

$$q_c = \frac{1}{e} A T^2 \exp(-\Phi/k_B T)\Phi \tag{2.28}$$

con $A = 3 \cdot 10^4$ A m^{-2}K^{-2} y $\Phi = 2.63$ eV fpara tungsteno dopado con torio (Benilov *et al,* 1995). El flujo total de calor en las paredes es, por tanto, $Q = q_i - q_c$.

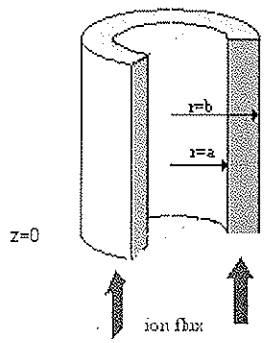
La siguiente figura muestra el flujo de calor hacia las paredes interiores del cátodo debido al impacto de iones, para valores de q_g de $2 \cdot 10^8$ J m^{-1} kg^{-1} y $5 \cdot 10^8$ J m^{-1} kg^{-1}.



Flujo de calor por bombardeo iónico para valores de q_g de $2 \cdot 10^8$ J m^{-1} kg^{-1} y $5 \cdot 10^8$ J m^{-1} kg^{-1}.

2.3 Transferencia de calor dentro del cátodo

La geometría del problema se muestra en la siguiente figura ($z = L - l$).



Geometría del cátodo hueco

Los iones impactan la superficie inferior y las paredes interiores del cátodo. La ecuación de conducción de calor en el metal del cátodo es

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} = 0 \tag{2.29}$$

donde $\tilde{T}(r,z)$ es la temperatura del metal del cátodo menos la temperatura ambiente. El efecto Joule de calentamiento se desprecia, al ser especialmente crítico para cátodos troncocónicos cerca del extremo de los mismos. Las condiciones de frontera son

$$\tilde{T}\Big|_{r=b} = 0 \qquad 0 < z \tag{2.30}$$

$$\kappa \left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial r}\right|_{r=a} = Q \qquad 0 < z \tag{2.31}$$

$$\lim_{z\to\infty} \tilde{T}(r,z) = 0 \qquad a < r < b \tag{2.32}$$

$$-\kappa \left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}\right|_{z=0} = Q_0 \qquad a < r < b \tag{2.33}$$

donde Q_0 es el flujo de vcalor debido al impacto iónico menos los efectos refrigerantes. Por simplificar, se toma constante e igual al calor cedido a las paredes interiores en el extremo inferior del cátodo. El problema se resolverá por separación de variables, haciendo uso del principio de superposición[1].

[1] En rigor, a pesar de que las ecuaciones son lineales, las condiciones de frontera hacen que el problema no lo sea. Estas no linealidades se sospecha que no tienen un peso importante en la solución, y se obvian.

Las dos soluciones que se van a superponer son: (a) solución en la que $Q = 0$ y (b) solución en la que $Q_0 = 0$. De ahora en adelante, las tempreaturas se considerarán normalizadas con respecto el punto de fusión del metal del cátodoT_m, y las distancias se normalizan respecto al radio interior del cátodo hueco a. Las funciones y variables, para evitar exceso de notación, se seguirán llamando como antes.Como resultado de la normalización, las condiciones de frontera toman la forma

$$\left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial r}\right|_{r=1} = \frac{aQ}{\kappa T_m} := q \tag{2.34}$$

y

$$\left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{aQ_0}{\kappa T_m} := q_0 \tag{2.35}$$

En el caso $Q = 0$ el cilindro se considera semi-infinito y la separación de variables arroja la solución general:

$$\left(C_1 \cdot Y_0(\lambda r) + C_2 \cdot J_0(\lambda r)\right)\left(C_3 \exp(\lambda z) + C_4 \exp(-\lambda z)\right) \tag{2.36}$$

donde λ es un número real positivo, Y_0 y J_0 las funciones de Bessel de orden cero y clase uno y dos respectivamente, y C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes de integración.

Las condiciones de frontera obligan a que se cumplan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} Y_0(\lambda b) + C_2 \cdot J_0(\lambda b) &= 0 \\ Y_0^{'}(\lambda a) + C_2 \cdot J_0^{'}(\lambda a) &= 0 \\ C_3 &= 0 \\ \left[Y_0(\lambda r) + C_2 \cdot J_0(\lambda r)\right] \lambda C_4 &= q_0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por lo que C_2 es $-\frac{Y_0(\lambda b)}{J_0(\lambda b)}$ y los autovalores λ_m se obtienen resolviendo la ecuación

$$J_0(\lambda b) Y_0^{'}(\lambda a). - Y_0(\lambda b) J_0^{'}(\lambda a) = 0 \tag{2.38}$$

y los cinco primeros autovalores (suficientes para la convergencia de la serie) se muestran en la Tabla siguiente, para diferentes valores de a y b:

$a=1\ b=2$	$a=1\ b=2.5$	$a=1\ b=3$
$\lambda_1 = 1.787$	$\lambda_1 = 1.242$	$\lambda_1 = 0.960$
$\lambda_2 = 4.803$	$\lambda_2 = 3.227$	$\lambda_2 = 2.437$
$\lambda_3 = 7.908$	$\lambda_3 = 5.288$	$\lambda_3 = 3.978$
$\lambda_4 = 11.035$	$\lambda_4 = 7.368$	$\lambda_4 = 5.535$
$\lambda_5 = 14.170$	$\lambda_5 = 9.455$	$\lambda_5 = 7.098$

Tabla 1

La función

$$U(\lambda_m r) = J_0(\lambda_m b)Y_0(\lambda_m r) - Y_0(\lambda_m b)J_0(\lambda_m r) \tag{2.39}$$

satisface pues las condiciones de frontera radiales. La solución es una combinación lineal de las mismas:

$$\tilde{T}_1(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} U(\lambda_m r)C_m \exp(-\lambda_m z) \tag{2.40}$$

donde

$$C_m = \frac{q_0}{\lambda_m \mathrm{N}_m(U)} \int_a^b \rho U(\lambda_m \rho)d\rho \tag{2.41}$$

y

$$\mathrm{N}_m(U) = \int_a^b \rho U^2(\lambda_m \rho)d\rho =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_m^2}\left[b^2\left(U'^2(\lambda_m b) + \lambda_m^2 U^2(\lambda_m b)\right) - a^2\left(U'^2(\lambda_m a) + \lambda_m^2 U^2(\lambda_m a)\right)\right] \tag{2.42}$$

puesto que (Abramowitz, 1964) $\int_a^b \rho R(\lambda_m \rho)R(\lambda_n \rho)d\rho = 0$ siempre que $m \neq n$.

El segundo caso es aquel para el que $q_0 = 0$, y ahora se considera el cilindro finito y de longitud L. Esta longitud se toma, en la práctica, bastante mayor que el radio interior del cátodo, de manera que la solución que se obtenga a este problema se puede sumar a la del problema inmediatamente anterior (2.40).con un margen de error razonable. En este caso, la solución general toma la forma

$$\left(D_1 \cdot I_0(\delta r) + D_2 \cdot K_0(\delta r)\right)\left(D_3 \cos(\delta z) + D_4 \sin(\delta z)\right) \tag{2.43}$$

y las condiciones de contorno implican que

$$\begin{aligned} I_0(\delta b) + D_2 \cdot K_0(\delta b) &= 0 \\ \left[I_0'(\delta a) + D_2 \cdot K_0'(\delta a)\right] \delta D_3 \cos(\delta z) &= q \\ D_3 \cos(\delta L) &= 0 \\ D_4 &= 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Los autovalores, en este caso, están dados por la tercera de las relaciones anteriores, y son $\delta_m = \frac{\pi(1+2m)}{2L}$. C_1 se toma igual a $K_0(\delta b)$ de manera que $C_2 = -I_0(\delta b)$. La solución es, entonces:

$$\tilde{T}_2(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\delta_m r) D_m \cos\left[\delta_m z\right] \tag{2.45}$$

donde

$$S(\delta_m r) = K_0(\delta b) I_0(\delta r) - I_0(\delta b) K_0(\delta r) \tag{2.46}$$

La propiedad

$$\int_0^L \cos\left[\frac{\pi\,(1+2m)}{2L}\rho\right] \cos\left[\frac{\pi\,(1+2n)}{2L}\rho\right] d\rho = \begin{cases} \frac{L}{2} \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{cases} \tag{2.47}$$

nos permite obtener las constantes

$$D_m = \frac{2\int_0^L q(\varsigma)\cos\left(\delta_m \varsigma\right) d\varsigma}{S'(\delta_m a)\delta_m L} \tag{2.48}$$

y la solución es

$$\tilde{T}_2(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} S(\delta_m r)\cos\left[\delta_m z\right] \frac{2\int_0^L q(\varsigma)\cos\left(\delta_m \varsigma\right) d\varsigma}{S'(\delta_m a)\delta_m L} \tag{2.49}$$

que debe ser sumada a (2.40) para obtener la solución al problema original, $\tilde{T}(r,z)$.

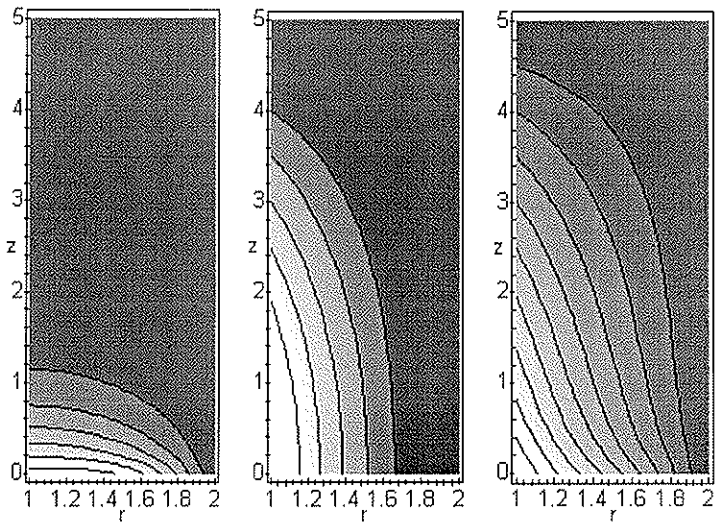
2.4 Discusión del modelo

2.4.1 Mapas de temperaturas y emisión de electrones

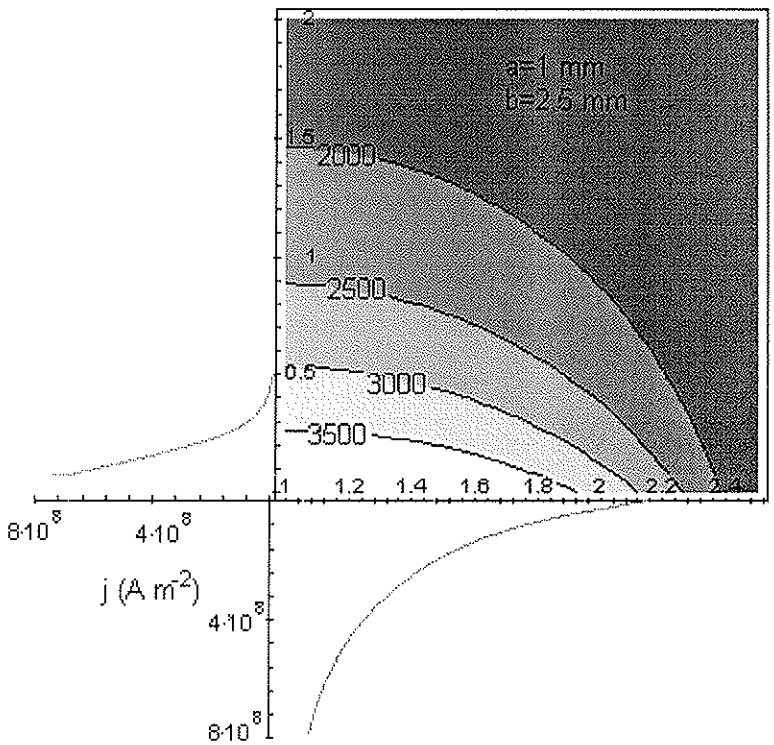
Con el objeto de determinar los mapas de temperaturas en el metal del cátodo, es necesario considerar los efectos de enfriamiento provocados por la

emisión de electrones. Es necesario programar un esquema iterativo, puesto que la emisión depende de la temperatura de las paredes, que es a su vez resultado de integrar las ecucaiones con las condiciones de frontera pertinentes. Se parte de un mapa de temperaturas obtenido sin tener en cuenta emisión de electrones desde su superficie. A continuación, se calculan las densidades de correiente asociadas a la emisión termiónica con este mapa inicial, y se calculan sus efectos refrigerantes. Se obtienen así nuevas condiciones de frontera con las que volver a resolver el problema,. El esuqema, en la práctica, es convergente.

Con el objeto de ilustrar el efecto que tiene cada condición de contorno, se representa en la siguiete figura tres mapas de temperaturas: el primero es el resultado de resolver el problema con sólo la interacción iónica en la superficie inferior cel cátodo; el segundo es la solución con sólo la cesión de calor del gas circulante por el interior; el tercero es la suma de ambos.



La siguiente Figura, por ejemplo, muestra el mapa de temperaturas para un cátodo hueco de radio interior 1 mm y radio exterior 2.5 mm. El gas que circula por su interior es argón bajo la influencia de un láser de $1.5 \cdot 10^{12}$ W m^{-2}, con una velocidad inicial de 0.1 M y a una temperatura inicial de 800 K.



Mapa de temperaturas en el interior del cátodo, y densidades de corriente emitidas desde sus paredes

Se puede observar que existe emisión electrónica significativa en el interior del cátodo, a pesar de que la zona de emisión privilegiada es la superficie plana interior del cátodo. Debe tenerse en cuenta, además, que existirá una contribución adicional a las densidades electrónica e iónica de la propia diferencia de potencial establecida entre el cátodo y el ánodo. Son del mismo orden de magnitud que las obtenidas con el láser (Solana *et al*, 1998).

2.4.2 Trabajo futuro

Una línea de trabajo a considerar en el futuro, respecto a este modelo estacionario del cátodo hueco, es precisamente la de hacerlo depender expli´citamente del tiempo, y atacar directamente los problemas de ignición del gas desde un

punto de vista dinámico. En la propuesta de investigación, los modelos se circunscribían al ámbito estacionario. Sin embargo, también se ha llevado a cabo un primer intento por tratar la dependencia temporal en el calentamiento del metal del cátodo, y analizar las velocidades y temperaturas del gas. que se resume a continuación.

Ecuaciones dinámicas básicas del gas

El movimiento del gas satisface las hipótesis:

1. La velocidad característica a lo largo del hueco del cátodo se supone significativamente mayor que la velocidad característica en dirección radial. Esto permite la formulación de un modelo unidimensional para el movimiento del gas dentro del cátodo.
2. Los efectos viscosos son despreciables.
3. El gas se comporta como un gas perfecto monoatómico.

El flujo compresible se asume que deriva de un potencial, demanera que la velocidad se puede expresar como su derivada:

$$v(l,t) = \frac{\partial \phi(l,t)}{\partial l} \tag{2.50}$$

Si se define la siguiente función

$$\varpi = \phi - lv + t\left(h + \frac{1}{2}v^2\right) \tag{2.51}$$

con $h(l,t)$ la entalpía específica del gas, la ecuación de continuidad se puede escribir como:

$$(\gamma - 1)h\frac{\partial^2 \varpi}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 \varpi}{\partial v^2} + \frac{\partial \varpi}{\partial h} = 0 \tag{2.52}$$

El cambio de variable $u = \sqrt{\frac{2h}{3}}$ trasnforma la anterior ecuación en

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varpi}{\partial v^2} = 0 \tag{2.53}$$

que resulta ser la ecuación de onda clásica, demanera que la solución de (2.52) es

$$\varpi(h,v) = f_1\left[\frac{1}{3}\left(v+\sqrt{2h}\right)\right] + f_2\left[v-\sqrt{2h}\right] \tag{2.54}$$

para funci0ones arbitrarias f_1 y f_2.La velocidad del fluido se puede obtener resolviendo la ecuación

$$0 = \frac{\partial f_1(l,t)}{\partial l} + \frac{\partial f_2(l,t)}{\partial l} + \frac{\partial v(l,t)}{\partial l}\left(1 - tv(l,t)\right) - t\frac{\partial h(l,t)}{\partial l} \tag{2.55}$$

A partir de entonces, hay que ensayar funciones que satisfagan las condiciones de contorno, teniendo en cuenta que (2.55) está acoplada con la ecuacion de la energía. El objetivo de ulteriores trabajos es investigar la solucióin de la ecuación anterior y obtener una descripción dinámica del comportamiento del gas dentro del cátodo.

Planteamiento dinámico del calentamiento del cátodo

La geometría del modelo (por conveniencia de propiedades de ortogonalidad de funciones) es ligeramente distinta: el cátodo se considera de longitud total $2L$, el extremo inferior localizado en $z = -L$ (zona de impacto iónico) y el superior en $z = L$ (zona a temperatura ambiente). La ecuación de transferencia de calor es, asumiendo dependencia explícita con el tiempo, la siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.56}$$

donde $T(r,z,t)$ es la temperatura del metal del cátodo menos la temperatura ambiente. El efecto Joule se desprecia.

Las condiciones de contorno son

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=b} = 0 \qquad -L < z < L \tag{2.57}$$

$$\kappa \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=a} = Q(t) \qquad -L < z < L \tag{2.58}$$

$$T(r,L,t) = 0 \qquad a < r < b \tag{2.59}$$

$$-\kappa \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=-L} = f_0(t) \qquad a < r < b \tag{2.60}$$

con la condición inicial

$$T(r,z,0) = 0 \tag{2.61}$$

donde f_0 es el flujo de calor debido al impacto de iones, y Q es el flujo de calor absorbido por el gas y cedido a las paredes interiores del cátodo, y debe obtenerse de las ecuaciones del movimiento dinámicas. El problema se puede resolver con la ayuda de transformaciones integrales. Se considera el siguiente problema homogéneo para una cierta función $\phi(r, z)$:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \lambda^2\phi = 0 \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0 \qquad -L < z < L \tag{2.63}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0 \qquad -L < z < L \tag{2.64}$$

$$\phi(r, L, t) = 0 \qquad a < r < b \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=-L} = 0 \qquad a < r < b \tag{2.66}$$

Aplicando separación de variables se obtiene

$$\phi(r, z) = (C_1 \cdot Y_0(\alpha r) + C_2 \cdot J_0(\alpha r))\,(C_3\cos(\delta z) + C_4\sin(\delta z)) \tag{2.67}$$

donde α^2 es la copnstante de separación y $\delta = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$ con $\lambda^2 > \alpha^2$. Si se imponen las condiciones de frontera homogéneas, la solución al problema es:

$$\phi_{n,k}(r, z) = R_n(r)Z_k(z), \qquad n, k = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.68}$$

con

$$R_n(r) = J_0(\alpha_n r)Y_0'(\alpha_n r) - Y_0(\alpha_n r)J_0'(\alpha_n r) \tag{2.69}$$

y

$$Z_k(z) = \cos(\delta_k L)\cos(\delta_k z) - \sin(\delta_k L)\sin(\delta_k z) \tag{2.70}$$

siempre que α_n sean las raíces de la ecuación

$$J_0'(\alpha b)Y_0'(\alpha a) - Y_0'(\alpha b)J_0'(\alpha a) = 0 \tag{2.71}$$

y δ_k las raíces de

$$\tan^2(\delta L) = 1 \tag{2.72}$$

es decir,

$$\delta_k = \frac{\pi(1 + 2k)}{4L} \tag{2.73}$$

La siguiente tabla da la lista de autovalores α_n para diferentes dimensiones del cátodo (L=5 mm). las unidades de los radios son mm.

$a=1\ b=2$	$a=1\ b=2.5$	$a=1\ b=3$
$\alpha_0 = 3.196$	$\alpha_0 = 2.156$	$\alpha_0 = 1.635$
$\alpha_1 = 6.312$	$\alpha_1 = 4.224$	$\alpha_1 = 3.179$
$\alpha_2 = 9.444$	$\alpha_2 = 6.306$	$\alpha_2 = 4.738$
$\alpha_3 = 12.582$	$\alpha_3 = 8.396$	$\alpha_3 = 6.303$
$\alpha_4 = 15.721$	$\alpha_4 = 10.487$	$\alpha_4 = 7.870$
$\alpha_5 = 18.859$	$\alpha_5 = 12.577$	$\alpha_5 = 9.436$
$\alpha_6 = 21.999$	$\alpha_6 = 14.672$	$\alpha_6 = 11.006$
$\alpha_7 = 25.139$	$\alpha_7 = 16.761$	$\alpha_7 = 12.576$
$\alpha_8 = 28.281$	$\alpha_8 = 18.857$	$\alpha_8 = 14.147$
$\alpha_9 = 31.422$	$\alpha_9 = 20.951$	$\alpha_9 = 15.716$

TLa solución al problema original (2.56), (2.57), (2.58), (2.59), (2.60), (2.61) es una combinación lineal de las autofunciones espaciales $\phi_{n.k}(r,z)$ de la forma

$$T(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k}(t)\phi_{n,k}(r,z) \tag{2.74}$$

Las funciones $A_{n,k}(t)$ se obtienen usando propiedades de ortogonalidad de las autofunciones $R_n(r)$ y $Z_k(z)$:

$$\int_a^b rR_n(r)R_m(r)dr = 0 \Leftrightarrow n \neq m \tag{2.75}$$

$$\int_{-L}^{L} Z_k(z)Z_s(z)dz = 0 \Leftrightarrow k \neq s \tag{2.76}$$

de manera que

$$A_{n.k}(t) = \frac{\int_a^b \int_{-L}^{L} \phi_{n,k}(r,z)T(r,z,t)rdrdz}{N(R_n)N(Z_{n,k})} \tag{2.77}$$

donde

$$N(R_n) = \int_a^b R_n^2(r)rdr = \frac{1}{2\alpha_m^2}\left[\rho^2 R_m'^2 + \lambda_m^2\rho^2 R_m^2\right]_a^b \tag{2.78}$$

y

$$N(Z_k) = \int_{-L}^{L} Z_k^2(z)dz = L \tag{2.79}$$

Se define la siguiente transformación integral:

$$\tilde{T}(t) = 2\pi \int_a^b \int_{-L}^{L} \phi_{n.k}(r,z)T(r,z,t)rdrdz \tag{2.80}$$

de forma que

$$A_{n.k}(t) = \frac{2\alpha_m^2 \tilde{T}(t)}{2\pi L \left[\rho^2 R_m'^2 + \lambda_m^2 \rho^2 R_m^2\right]_a^b} \tag{2.81}$$

y la ecuación (2.56) se puede integrar sobre todo el dominio para dar

$$2\pi \int_a^b \int_{-L}^{L} \phi_{n.k}(r,z)\nabla^2 T(r,z,t)rdrdz = \frac{2\pi}{\chi}\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} \tag{2.82}$$

Usando el teorema de Gree y la ecuación homogénea para ϕ se obtiene

$$2\pi \int_a^b \int_{-L}^{L} \phi_{n.k}(r,z)\nabla^2 T(r,z,t)rdrdz = -\lambda_{n,k}^2 \tilde{T}(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{4} \int_{S_j} \left(\phi_{n,k}\frac{\partial T}{\partial n_j} - T\frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial n_j} \right) dS_j \tag{2.83}$$

con S_j las diferentes superficies que limitan la geometría del cátodo: S_1 el anillo superior, S_2 el anillo inferior, S_3 la pared externa y S_4 la pared interna, con normales exteriores $n_{1,2,3,4}$. Usando las condiciones de frontera del problema original y del homogéneo se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{4} \int_{S_j} \left(\phi_{n,k}\frac{\partial T}{\partial n_j} - T\frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial n_j} \right) dS_j =$$

$$= \underbrace{\frac{2\pi}{k}\left(\int_a^b f_0 \phi_{n,k}(r,-L)rdr - a\int_{-L}^{L} Q\phi_{n,k}(a,z)dz \right)}_{m_{n,k}(t)} \tag{2.84}$$

de manera que la solución formal de (2.82) es

$$\tilde{T}(t) = e^{-\chi\lambda_{n,k}^2 t}\chi \int_0^t e^{\chi\lambda_{n,k}^2 \tau} m_{n.k}(\tau)d\tau \tag{2.85}$$

con

$$\lambda_{n.k} = \sqrt{\left(\frac{\pi(1+2k)}{4L}\right)^2 + \alpha^2} \tag{2.86}$$

La solución al problema original es entonces

$$T(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\alpha_m^2 e^{-\chi\lambda_{n,k}^2 t}\chi \int_0^t e^{\chi\lambda_{n,k}^2 \tau} m_{n.k}(\tau)d\tau}{2\pi L\left[\rho^2 R_m'^2 + \lambda_m^2\rho^2 R_m^2\right]_a^b}\phi_{n.k}(r,z) \tag{2.87}$$

Esta solución debe trabajarse, integrándola con el modelo dinámico del gas que circula por el interior del cátodo. Todo ello es motivo de ulteriores investigaciones, orientadas a tener un modelo global dinámico del proceso completo.

El problema inverso

Resulta de interés el ser capaz de tener una idea del flujo de calor que actúa sobre las paredes interiores del cátodo (indirectamente, una medida del grado de ionización) a partir de una serie de mediciones seleccionadas de la temperatura en las paredes del cátodo.

En el caso estacionario discutido en detalle, el problema inverso toma la forma

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} C_m U_m(r_1)\exp(-\lambda_m z_1) + \sum_{m=1}^{\infty} D_m S_m(r_1)\cos\left[\delta_m z_1\right] &= T_1^0 \\
\sum_{m=1}^{\infty} C_m U_m(r_2)\exp(-\lambda_m z_2) + \sum_{m=1}^{\infty} D_m S_m(r_2)\cos\left[\delta_m z_2\right] &= T_2^0 \\
&\cdots \\
\sum_{m=1}^{\infty} C_m U_m(r_N)\exp(-\lambda_m z_N) + \sum_{m=1}^{\infty} D_m S_m(r_N)\cos\left[\delta_m z_N\right] &= T_N^0
\end{aligned}$$

con las constantes C_m y D_m como incógnitas, dado un conjunto de N medicionesde la temperatura $\left(T_j^0\right)_{1\leq j\leq N}$ realizadas en un conjunto de N puntos

$((r_j, z_j))_{1 \leq j \leq N}$. Las series que representan la temperatura converjen, como ya se ha señalado, muy rápidamente, y dos términos de las mismas son suficientes, en general, para dar una descripción precisa del mapa de temperaturas en el metal del cátodo. Haciéndolo así, el problema inverso se resuelve inmediatamente:

$$\vec{\mathrm{d}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T} \tag{2.88}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} G(\lambda_1, r_1, z_1) & G(\lambda_2, r_1, z_1) & H(\delta_1, r_1, z_1) & H(\delta_2, r_1, z_1) \\ G(\lambda_1, r_2, z_2) & G(\lambda_2, r_2, z_2) & H(\delta_1, r_2, z_2) & H(\delta_2, r_2, z_2) \\ G(\lambda_1, r_3, z_3) & G(\lambda_2, r_3, z_3) & H(\delta_1, r_3, z_3) & H(\delta_2, r_3, z_3) \\ G(\lambda_1, r_4, z_4) & G(\lambda_2, r_4, z_4) & H(\delta_1, r_4, z_4) & H(\delta_2, r_4, z_4) \end{pmatrix} \tag{2.89}$$

$$\vec{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \tag{2.90}$$

$$G(\lambda_m, r, z) = U_m(r) \exp(-\lambda_m z) \tag{2.91}$$

$$H(\delta_m, r, z) = S_m(r) \cos[\delta_m z] \tag{2.92}$$

Se debe tener cuidado, sin embargo, con los puntos que se escojen para tomar temperaturas, dado que el número de condición de la matriz $\mathbf{A}$ puede crecer demasiado, y su inversa ser extremadamente sensible a errores de redondeo, ofreciendo una estimación de $\vec{\mathrm{d}}$ (y en consecuencia del flujo) del todo inútil. Computar los valores ingulares de la matriz es por tanto un paso previo de importancia.

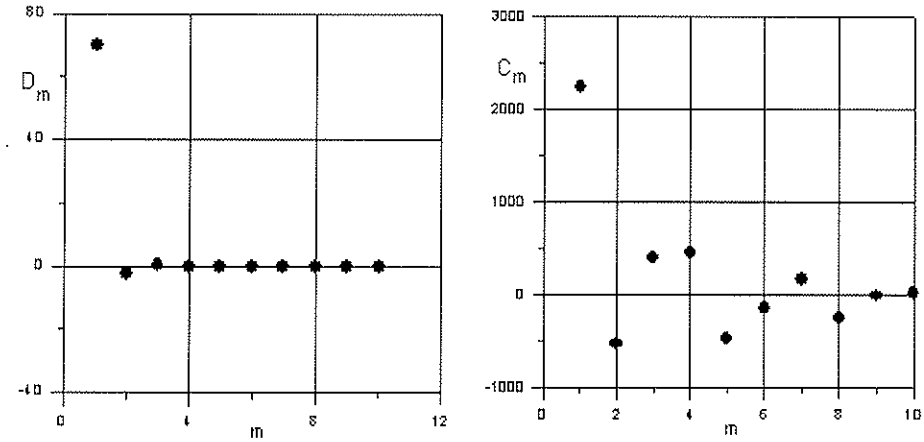
Una vez que estos valores singulares se obtengan, q_0 se puede deducir de cualquiera de los valores C_1 o C_2 (su valor no puede depender de la elección, lo cual constituye un primer test de validez de la estimación). El flujo iónico en la pared interna del cátodo $q(z)$ es

$$q(z) = \sum_{i=1}^{2} \delta_i S'(a) D_i \cos(\delta_i z) \tag{2.93}$$

Se deben realizar test de calibración y predicción para permitir reproducir las condiciones en el interior del cátodo a partir de las medidas.

2.5 Resumen

Se tiene un modelo estacionario para el cátodo hueco con un láser ionizando un gas que circula por su interior. Las soluciones obtenidas son analíticas, expresadas a través de series de rápida convergencia. La siguiente Figura muestra la evolución de las constantes en las series (C_m y D_m para $m = 1$ a 10), dando una indicación de la rapidez de convergencia:



El modelo predice:

- Si se produce o no ignición estable del plasma antes de su salida del cátodo.
- Posibilidad de formación de inestabilidades (Mach>1).
- Temperatura del gas (plasma) de salida del cátodo.
- Densidad de corriente emitida.

La densidad de corriente y la temperatura del plasma se pueden tomar como condiciones de contorno para el problema del arco de soldadura, que se pasa a estudiar en el siguiente Capítulo.

Asimismo se ha planteado la línea de trabajo futura, con la formulación de modelos dinámicos que tengan en cuenta el tiempo como variable independiente. A pesar de que la propuesta de investigación original tenía solo en

cuenta modelos estacionarios, se ha considerado interesante incluir los esbozos de los modelos dinámicos, a desarrollar detalladamente en el futuro, por la importancia que pudieran tener en los regímenes de arranque del proceso de soldadura (esencialmente, localizar tiempos característicos de funcionamiento estable).

3. Modelos del arco de soldadura

3.1 Resumen del estado del arte

El plasma generado en soldadura por arco emana de una boquilla constreñida (la antorcha de soldadura) y se desplaza a relativamente alta velocidad a la pieza, alcanzando temperaturas de 20.000 K. La energía transportada por el plasma es absorbida en las superficie de la pieza. En ocasiones, esta energía es suficiente no solo para fundir, sino también para generar un canal de vapor mezclado con el plasma del arco (keyhole) que penetra en la pieza.

Las bases teóricas de la soldadura por arco de plasma fueron sentadas por Lancaster (1966). Las primeras publicaciones de modelos acompañadas de datos experimentales relevantes se remontan a finales de los 70. Lowke (1979) investigó las propiedades de de la columna de plasma estabilizada por convección natural. El flujo de gas en dicha columna fue estudiado, con especial detalle, por Allum (1981). La influencia del gas de blindaje (ocasionalmente añadido alrededor del gas que se ioniza y forma plasma, para mantenerlo mejor confinado) fue analizada por Kovitya (1982), encontrándose con la relativa sorpresa de que la velocidad de dicho gas externo no influye apreciablemente en las propiedades y estabilidad del plasma interior.

Así, hasta mediados de los años 80, la mayoría de los modelos son analíticos o semianalíticos, aportando estructura al problema estudiado y conocimiento de los principios físicos subyacentes. Con el crecimiento de la potencia de cálculo en los ordenadores, se comenzío a generar códigos que trataran de resolver de manera eficiente el conjunto de ecuaciones magnetohidrodinámicas que describen el comportamiento del arco. Ejemplos de tales esfuerzos son las publicaciones de Farmer et al (1986), Zhu et al (1992) y González et al (1997). La adecuación de los modelos a los datos experimentales, en determinados regímenes, puede llegar a ser muy buena. Sin embargo, resulta difícil conocer el grado de inexactitud numérica cometido en determinados rangos inestables y, en cierto modo, la identificación de los fenómenos físicos individuales actuantes se difumina en la resolución conjunta.

Paralelamente y, en cierto modo, como oposición al punto de vista estrictemente computacional, se han ido publicando trabajos que se centran en efectos particulares de la columna o de los electrodos. Dowden et al (1991), mediante el desacople de las ecuaciones hidrodinámicas y magnéticas, muestran que sólo es posible encontrar una solución física al problema de la forma estable de la columna de plasma para determinados valores de los parámetros del modelo, lo cual explica la dificultad de seleccionarlos en la práctica para obtener soldaduras estables. Kapadia et al (1992) estudian la distribución de carga espacial cerca de los electrodos y en la columna de plasma por medio de modelos sencillos, que sin embargo predicen cualitativamente bien el comportamiento de las especies iónicas cerca del cátodo y el ánodo. Nosotros hemos dedicado también un cierto esfuerzo para estudiar las caídas de potencial cerca del cátodo (Solana et al, 1996) y el efecto erosivo de los iones sobre el mismo (Solana et al, 1998).

Los modelos que aquí se usan (variaciones y ampliaciones de otros que hemos usado en trabajos anteriores) son esencialmente analíticos, en tanto se pretende dar una idea de la influencia de diversos gases en el proceso global y, para hacer esto, es necesario disponer de expresiones lo más sencillas posible que faciliten el análisis paramétrico.

En lo que sigue, se presentan dos modelos para el arco de soldadura: el primero es válido para velocidades del gas pequeñas (se desprecia la fuerza de Lorentz, pero se asume que la resistividad del palsma depende de la temperatura), y el segundo para elevadas.velocidades (se incluye el término de Lorentz, pero se toma resistividad constante)

3.2 Modelo para velocidades bajas

3.2.1 Ecuaciones y resolución

Este es un modelo unidimensional para el arco. Como se señaló anteriormente, además, se desprecia el término $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ en la correspondiente ecuación de Maxwell ($\eta \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$) donde $\mathbf{j}$ es el vector densidad de corriente, $\mathbf{E}$ es el vector campo eléctrico, $\mathbf{u}$ es el vector velocidad y $\mathbf{B}$ es el vector campo magnético.

El plasma fluye a velocidad U desde un cátodo situado en $x = -b$ a potencial (desconocido) $-V_0$ hasta la pieza (a potencial cero) situada en $x = 0$. El

cátodo se encuentra a temperatura T_0. Las ecuaciones que gobiernan el potencial $V(x)$, la temperatura $T(x)$ y la densidad de carga $\sigma(x)$ son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{1}{\eta}\frac{dV}{dx} &= 0 \\ \sigma &= -\epsilon_0 \frac{d^2V}{dx^2} \\ \rho C_p U \frac{dT}{dx} &= \frac{1}{\eta}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \\ j &= \frac{1}{\eta}\frac{dV}{dx} \end{aligned} \tag{3.1}$$

con $\eta(T)$ la resistividad, ϵ_0 la constante dieléctrica en el vacío, ρU el gasto (supuesto constante), y C_p el calor específico del plasma.

Las ecuaciones anteriores pueden integrarse formalmente. La temperatura $T(x)$ viene dada de forma implícita por la expresión

$$\int_{T_0/T_{ad}}^{T(x)/T_{ad}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)} = j_{ad}^2(1 + x/b)$$

donde

$$T_{ad} = \frac{I}{20k}$$

con I el potencial de ionización del gas empleado, k la constante de Boltzmann, b la distancia entre electrodos, y

$$j_{ad} = j\sqrt{\frac{20k\eta_0 b}{\rho C_p U I}}$$

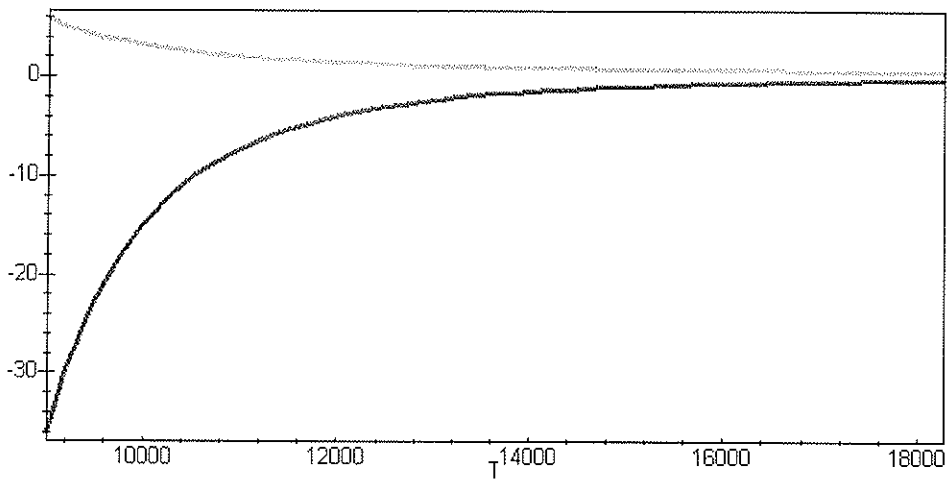
con η_0 la resistividad promedio del plasma ($10^{-4}\ \Omega\ m$, a 10.000 K).

Se necesita además una expresión para $\eta(T)$. Se toma la dada por Devoto (1967), que es:

$$\eta(T) = 5.24092\left(\frac{T}{T_{ad}}\right)^4 \exp\left[10\left(\frac{T_{ad}}{T} - 1\right)\right] \tag{3.2}$$

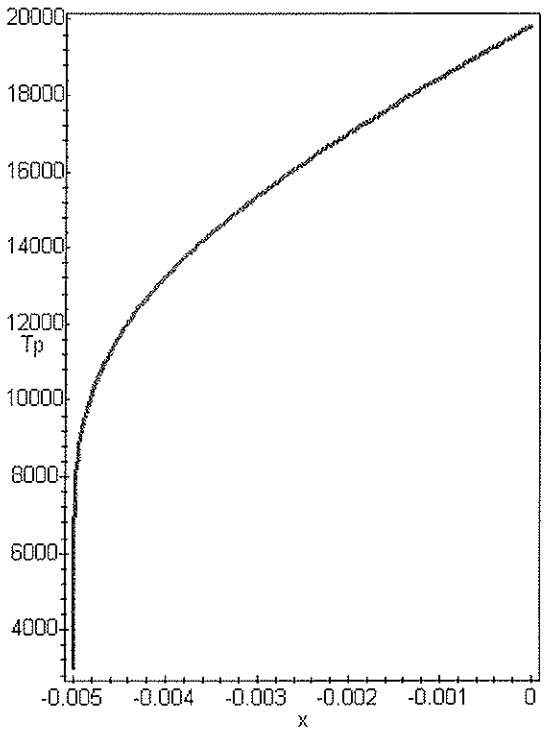
3.2.2 Discusión

La resistividad (cantidad positiva) se representa en la siguiente Figura, junto con su derivada. Se observa la enorme variación inicial de la misma (de hecho, la resistividad tiende a infinito cuando la temperatura baja; cerca del cátodo, esto podría suponer un problema, puesto que una resistividad infinita hace que la corriente se anule. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que tiende a infinito en un espesor que tiende a cero. Así, el producto de la resistividad por el espesor se mantiene finito, y de hecho las ecuaciones predicen la existencia de una corriente determinada).



Perfiles de la resistividad y su derivada con la temperatura.

La siguiente figura muestra el perfil de temperaturas para condiciones estándar del arco (gasto másico de 10 Kg m^{-2} s^{-1}, densidad de corriente de $1.4 \cdot 10^7$ A m^{-2}, arco de 5 mm).



Perfil de la temperatura del arco de soldadura.

Se puede obswrvar un fortísmo incremento de la temperatura en las proximidades del cátodo (como, en efecto, sucede en la realidad). El crecimiento continuo hasta la frontera del ánodo es, sin embargo, poco realista (debería tenerse en cuenta el balance de energía entrante en la pieza para ajustar la temperatura del plasma justo al borde del ánodo). Se debe entender, por tanto, como el perfil de temperaturas a una distancia suficiente del ánodo como para que el efecto de la frontera no se haga notar demasiado. Es de destacar, en cualquier caso, el que se obtenga un valor máximo de la temperatura del orden de los 20.000 K, ajustado a los datos experimentales.

Eliminando la resistividad de las ecuaciones e integrando, se obtiene que

$$\frac{T}{T_{ad}} = \frac{T_0}{T_{ad}} + j_{ad} V_0 \sqrt{\frac{20k}{b\eta_0 \rho C_p U I}} \left(\frac{V}{V_0} + 1\right) \tag{3.3}$$

de manera que la expresión

$$\int_{T_0/T_{ad}}^{\frac{T_0}{T_{ad}}+j_{ad}V_0\sqrt{\frac{20k}{b\eta_0\rho C_p UI}}(\frac{V}{V_0}+1)} \frac{d\xi}{\eta(\xi)} = j_{ad}^2(1+x/b) \tag{3.4}$$

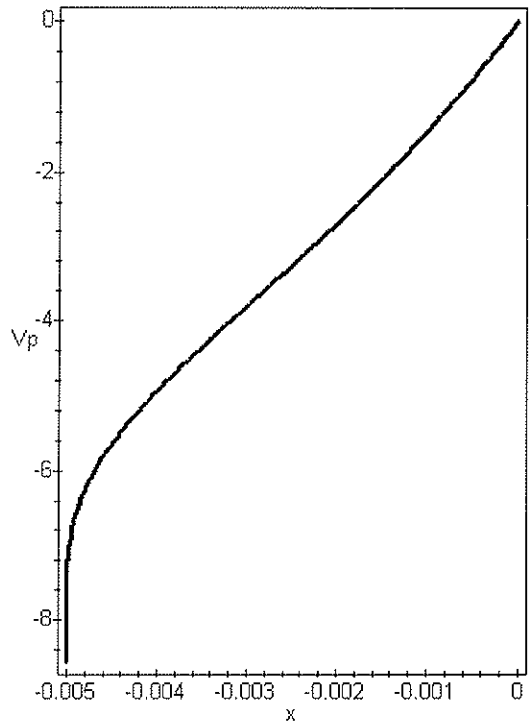
ofrece el potencial de manera implícita.

Debe decirse que V_0 viene dado por el modelo: debe ser consistente con la corriente que se introduce en el arco, que sí es un dato; así, j_{ad} es constante e independiente de x. En la expresión anterior, si se particulariza para $x = 0$ (donde $V = 0$) se tiene que

$$\int_{T_0/T_{ad}}^{\frac{T_0}{T_{ad}}+j_{ad}V_0\sqrt{\frac{20k}{b\eta_0\rho C_p UI}}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)} = j_{ad}^2 \tag{3.5}$$

lo cual resulta ser una ecuación en V_0. Por ejemplo, para las condiciones anteriores, la caída de potencial total V_0 es de 7.71 V.

Tras determinar V_0, se obtiene el perfil del potencial, tal como muestra la siguiente Figura:



Perfil del potencial.

De nuevo, el modelo sencillo predice la fuerte caída de potencial cerca de los electrodos. Cerca del cátodo se experimenta la mayor pendiente, que corresponde al fuerte incremento de la temperatura y al cambio de resistividad asociado.

3.3 Modelo para velocidades altas

3.3.1 Ecuaciones y resolución

En este caso se tiene en cuenta la presencia del campo magnético (el término de Lorentz crece en importancia con el módulo de la velocidad del plasma). El tener en cuenta una dependencia de la resistividad con la temperatura complica la resolución de las ecuaciones (bidimensionales forzosamente, aunque cuasi estacionarias). Se asume, por tanto, que la columna de plasma está a

una determinada temperatura promedio.

El campo magnético tiene una sola componente, esto es, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, y la densidad de corriente dos ($\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0)$), que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial y} \\ j_y &= -\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{U}{\eta}B = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.6}$$

de manera que el potencial satisface

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\mu_0 U}{\eta_0}\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

Es posible integrar esta ecuación analiticamente, imponiendo condiciones de contorno razonables. Si se asume que el potencial se anula en el ánodo ($x = 0$) y que tiende a cero exponencialmente con la distancia y al cátodo (alcanzando un mínimo en $x = -b$ igual a $-V_0$) se encuentra que

$$V(x, y) = e^{-\lambda y}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2+4\alpha}\right)x} - e^{-\frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2+4\alpha}\right)x}\right] \tag{3.8}$$

con

$$\alpha = \frac{\mu_0 U}{\eta_0}$$

y λ la solución de la ecuación

$$V_0 = e^{\frac{1}{2}\left(\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2+4\alpha}\right)b} - e^{\frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2+4\alpha}\right)b} \tag{3.9}$$

Por su parte, el campo magnético obedece la ecuación

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{\mu_0 U}{\eta_0}\frac{\partial B}{\partial x} = 0 \tag{3.10}$$

que admite la solución

$$B(x, y) = -\frac{\mu_0 U}{\eta_0} y \frac{e^{\sqrt{\frac{\mu_0 U}{\eta_0}}x}}{1 - e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 U}{\eta_0}}b}} \tag{3.11}$$

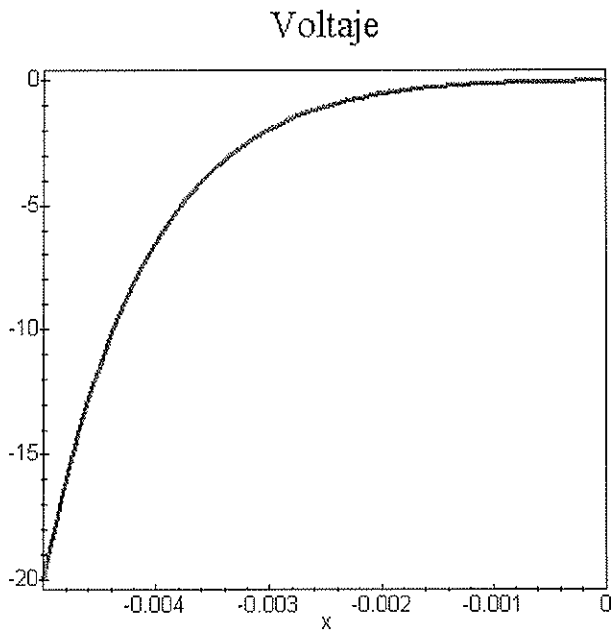
Las densidades de corrientes se obtienen entonces de

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{U}{\eta_0}\frac{e^{\sqrt{\frac{\mu_0 U}{\eta_0}}x}}{1-e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 U}{\eta_0}}b}} \\ j_y &= -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x} = \left(\frac{\mu_0^{1/3}U}{\eta_0}\right)^{3/2} y\frac{e^{\sqrt{\frac{\mu_0 U}{\eta_0}}x}}{1-e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 U}{\eta_0}}b}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.3.2 Discusión

Se muestra a continuación las gráficas más significativas obtenibles con el modelo.

En primer lugar, la caída de potencial a lo largo del arco se representa en la siguiente Figura.

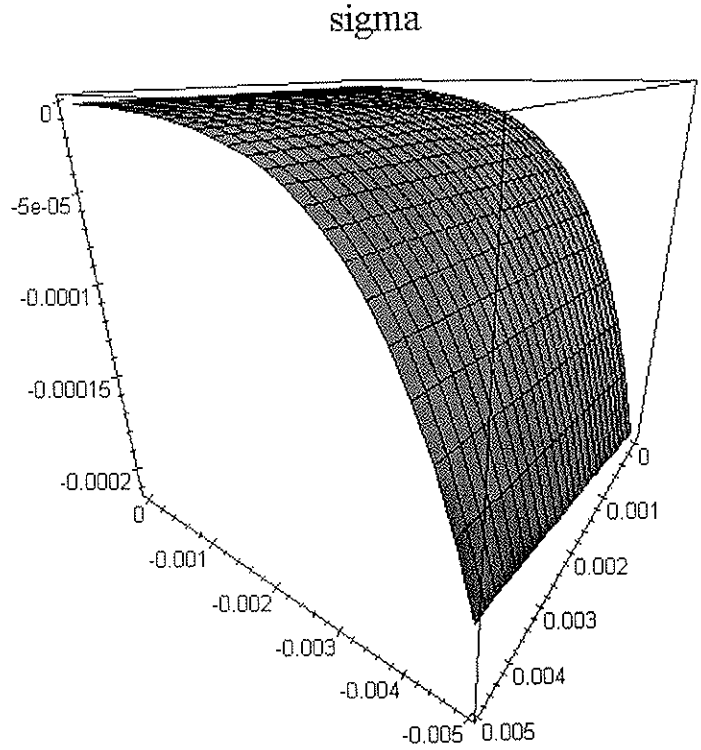


Caída de potencial a lo largo de la recta $y = 0$.

Se puede observar que, para este modelo, la caída de potencial cerca del cátodo es menos pronunciada que para el modelo de bajas velocidades. A pesar de tener en cuenta dos variables espaciales independientes (y el campo

magnético), este modelo no captura fielmente la existencia de una muy fina capa cerca del cátodo con gran caída de potencial.

El hecho de que tal capa no sea predicha en el modelo depende, por supuesto, de las velocidades del gas, que contribuyen a la difusión de partículas aguas abajo de forma aparentemente muy efectiva. Como consecuencia, la zona de densidad de carga cerca del cátodo se extiende, como se puede ver en la siguiente Figura.



Densidad de carga en el plasma

Se puede observar que el modelo predice la existencia de densidad de carga negativa en una zona bastante amplia del arco, no sólamente cerca del cátodo. Esta densidad de carga se hace menor en módulo, pero más extensa, a medida que la velocidad del gas aumenta. Debe señalarse que el modelo a bajas velocidades tendía a predecir una zona de densidad de carga positiva cerca del cátodo, más acorde con mediciones tomadas directamente. En la realidad,

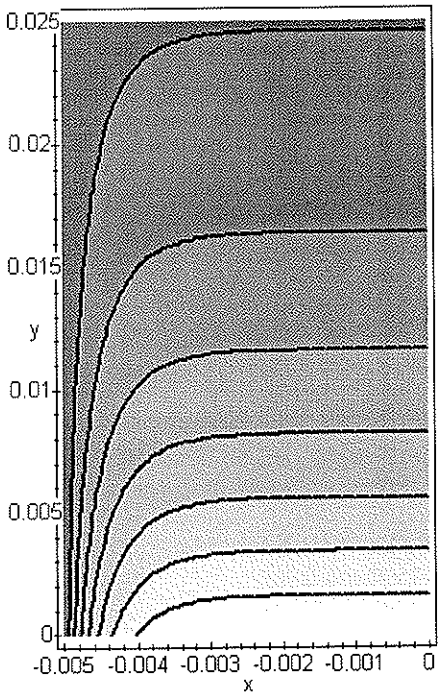
probablemente haya una mezcla de ambos modelos, siendo en general muy complicado predecir en qué condiciones exactas la densidad de carga será de uno u otro signo.

La temperatura se puede obtener como función de las coordenadas espaciales integrando la ecuación de conservación de la energía. Si se supone (tal como es el caso) que la variación del potencial con la coordenada y es menor que la variación con la coordanada x, además de suponer que el transporte de calor es predominantemente convectivo (adecuado para velocidades altas) se tiene un problema cuasi unidimensional cuya solución es

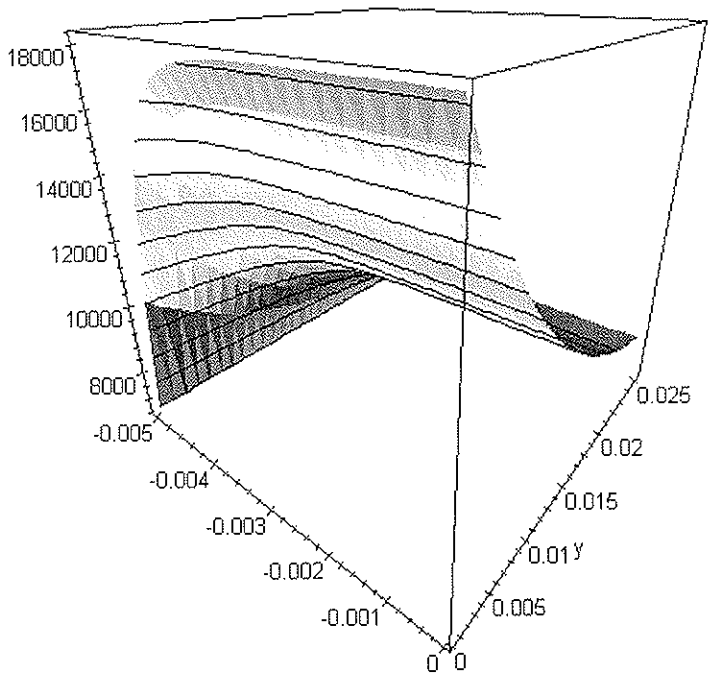
$$T = T_0 + \int_{-b}^{x} \frac{1}{\eta_0 \rho U C_p} \left(\frac{\partial V(\xi, y)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \tag{3.13}$$

Las siguientes figuras muestran el perfil de las temperaturas. El mapa de contorno da cuenta de la apertura del arco desde la boquilla, y el mapa tridimensional de los valores alcanzados (se supone que el gas sale del orificio del cátodo hueco a una temperatura de 7000 K).

T



Mapa de contorno de la temperatura



$T(x, y)$

Se observa de nuevo el fuerte crecimiento de la temperatura en un relativamente estrecho margen, a pesar de que no es tan estrecho como el que mostraba el primer modelo (más cerca de las condiciones habituales de soldadura, donde el gas se aporta a velocidades moderadas).

Debe hacerse notar que no se está teniendo en cuenta el efecto de absorción de calor en el ánodo. En el modelo que se presenta en el siguiente capítulo se analiza la absorción de calor de la placa soldada, y en consecuencia se varían las líneas de contorno cerca de dicha pieza. Estas modificaciones acaban ofreciendo la característica forma de campana del arco de soldadura. Para resolver el problema de la absorción de calor en el ánodo se toman, precisamente, las temperaturas calculadas ahora como condición de contorno.

El efecto del láser sobre el calentamiento del plasma del arco también puede ser tenido en cuenta. La fuente de calor (qwatios por unidad de volumen)

que genera el haz láser es

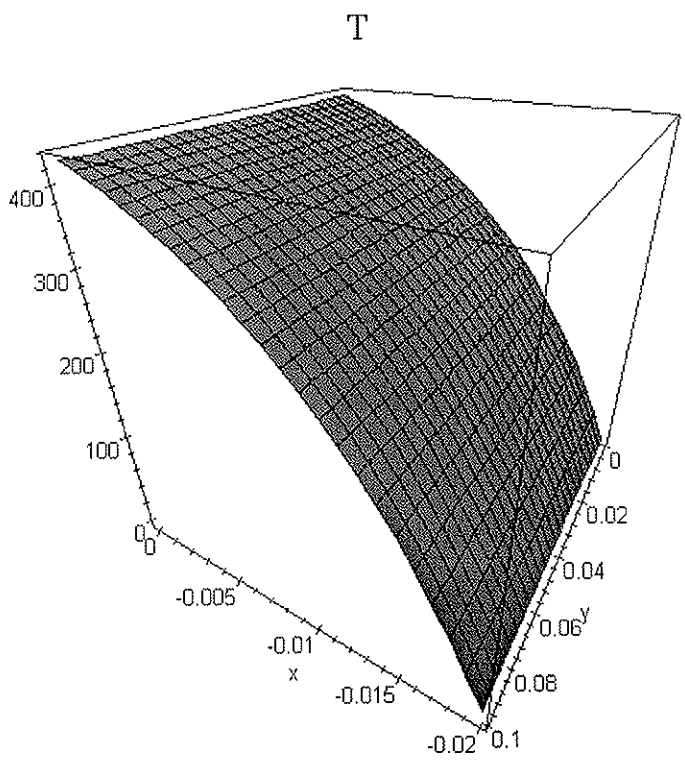
$$\frac{dI}{dx} = \alpha I_0 e^{-\alpha x}$$

donde I_0 representa una medida de la intensidad del láser a la salida del orificio del cátodo, y α es el coeficiente de absorción. La temperatura en el interior del plasma es entonces

$$T = T_0 + \int_{-b}^{x} \left(\frac{1}{\eta_0 \rho U C_p} \left(\frac{\partial V(\xi, y)}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{\rho U C_p} \alpha I_0 e^{-\alpha(\xi+b)} \right) d\xi \qquad (3.14)$$

suponiendo un coeficiente de absorción promediado que no dependa de la temperatura.

La contribución neta del término de fuente láser no será en general muy significativa: el haz se irá desfocalizando dentro del plasma, de manera que la intensidad efectiva no será muy grande. A modo de ejemplo, se muestra en la siguiente gráfica el incremento de temperatura que aporta un haz láser de 1 kW que se desfocaliza hasta un radio promedio de 1 mm dentro del plasma, con un coeficiente de absorción promediado de 200 m^1.



donde se observa que la máxima diferencia de temperaturas es de alrededor de 400 K.

4. Modelo de interacción con el ánodo

4.1 Modelo del calentamiento del ánodo

Se propone un método de resolución de la ecuación diferencial de conducción da calor basado en técnicas de transformadas integrales.

Las hipótesis son:

- El ánodo es un medio homogéneo, cuyas propiedades no dependen fuertemente de la temperatura.
- Se formula un modelo con simetría radial.
- Se supone que el calor se cede al ánodo en una región finita, con un flujo de calor promediado constante. El flujo de calor depende del mapa de temperaturas cerca del ánodo, así como de la intensidad del láser incidente.

La ecuación a resolver es:

$$\frac{\delta^2 T_a}{\delta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta T_a}{\delta r} + \frac{\delta^2 T_a}{\delta z^2} = 0 \tag{4.1}$$

donde r es la coordenada radial, z la distancia desde la superficie del ánodo al interior del mismo y $T_a(r,z)$ la temperatura del ánodo.

Se supone que el flujo de calor Q se extiende por una superficie correspondiente a $0 \leq r < a$. Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} -k\frac{\delta T_a}{\delta z}_{z=0} &= Q,\ 0 \leq r < a \qquad (4.2)\\ &= 0,\ r > a \\ \lim_{z\to\infty} T_a(r,z) &= 0 \qquad (4.3) \end{aligned}$$

Se define la transformada de Hankel de orden n de una función cualquiera $f(r)$ así:

$$H_n(f(r)) = F_n(\sigma) = \int_0^\infty r J_n(\sigma r) f(r) dr \tag{4.4}$$

con J_n la función de Bessel de orden n y clase dos.

La antitransformada de Hankel es:

$$f(r) = \int_0^\infty \sigma J_n(\sigma r) F_n(\sigma) d\sigma \tag{4.5}$$

Si se toma la transformada e Hankel de orden cero en el problema original, la ecuación se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \sigma^2\theta = 0 \tag{4.6}$$

donde $\theta = H_0(T_a(r,z))$. La condición de nulidad en el infinito se hace extensible a la transformada de Hankel. Por otro lado, la condición sobre la derivada se transforma en:

$$-k\frac{d\theta}{dz}_{z=0} = Q\int_0^a r J_0(\sigma r) dr = \frac{aQ}{\sigma} J_1(\sigma a) \tag{4.7}$$

Integrando (4.6) con las condiciones de contorno dadas, se tiene

$$\theta(z,\sigma) = \frac{aQ}{k\sigma^2} J_1(\sigma a) e^{-\sigma z} \tag{4.8}$$

y aplicando la antitransformada (4.5) se obtiene la temperatura (en exceso sobre la ambiente):

$$T_a(r,z) = \frac{aQ}{k}\int_0^\infty J_0(\sigma r) J_1(\sigma a) e^{-\sigma z}\frac{d\sigma}{\sigma} \tag{4.9}$$

Como ejemplo, se muestra el contorno de la piscina fundida en las siguientes Figuras. La primera de ellas corresponde a una intensidad incidente sobre la pieza de 10^9 W m^{-2}, y la segunda del doble (ambas fuentes incidentes sobre una superficie de 1 mm de radio).

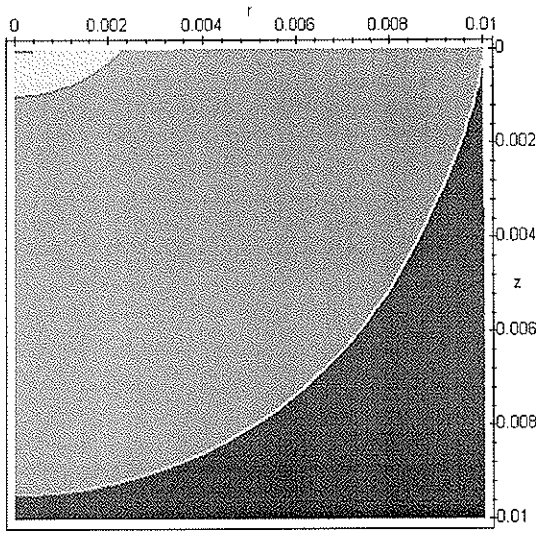


Figura A. Perfil de la piscina fundida para una intensidad de 10^9 W m^{-2}.

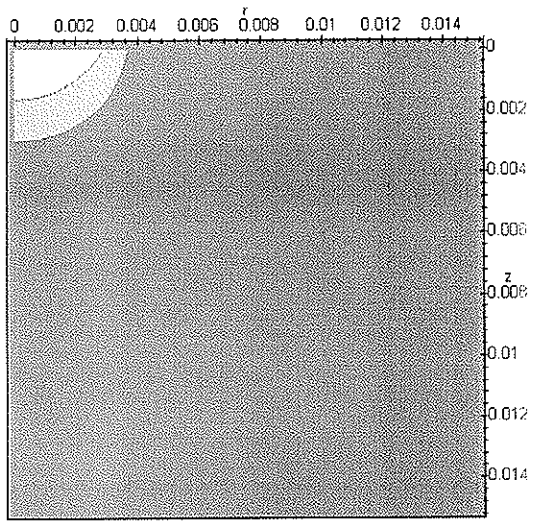


Figura B. Perfil de la piscina fundida para una intensidad de $2*10^9$ W m^{-2}.

La zona más clara e ambas figuras corresponde a la zona potencialmente vaporizada. El color intermedio delimita la extensión de la zona fundida. Se

observa pues que es posible (a intensidades observadas en la práctica) realizar soldadura tipo keyhole con arco asistido por láser.

El efecto del campo electromagnético sobre la distribución de intensidad resulta de crucial interés. El siguiente modelo trata, precisamente, de cualificar y cuantificar este efecto.

4.2 Modelo de interacción electromagnética

Se supone ahora que la corriente penetra en el keyhole que se forma en la soldadura, con el objeto de localizar los sumideros de corriente por debajo de la superficie de la pieza.

Las paredes del keyhole se supone que se mantienen a potencial nulo, de forma que la ecuación del potencial a integrar es

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\mu_0 U}{\eta_0}\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{4.10}$$

sujeta a las condiciones de potencial nulo en las paredes del canal ($x = \pm b$). Esta solución, además, debe ser continua en la parte superior de la pieza con respecto a la ecuación del potencial en el plasma.

Se buscan soluciones de la forma

$$V = -V_0 \frac{\epsilon}{6b/L + 2\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos[(n + \frac{1}{2})\pi \frac{y}{L}] e^{\frac{\lambda_n x}{L}} \tag{4.11}$$

$$B = \frac{V_0 \mu_0}{\eta} \frac{\epsilon}{6b/L + 2\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n b_n \text{sen}[(n + \frac{1}{2})\pi \frac{y}{L}]}{(n + \frac{1}{2})\pi} e^{\frac{\lambda_n x}{L}} \tag{4.12}$$

donde los autovalores del problema son

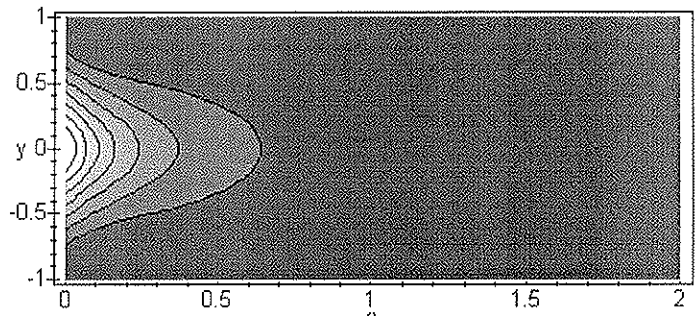
$$\lambda_n = \frac{1}{2}[\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + (2n+1)^2\pi^2}$$

con

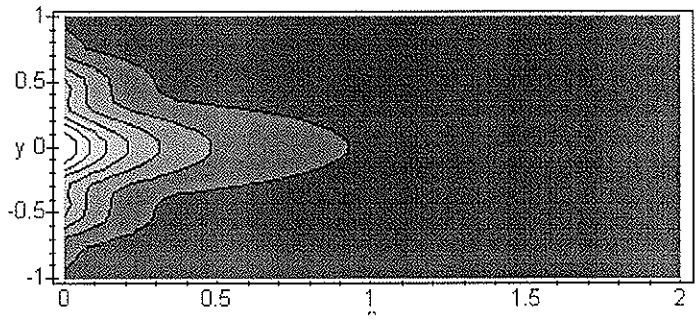
$$\epsilon = \frac{\mu_0 U L}{\eta}$$

Las constantes b_n se calculan a partir de las soluciones en el plasma exterior a la pieza.

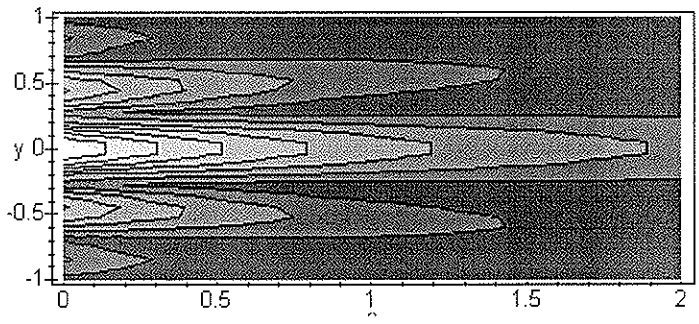
Se muestra a continuación el efecto de la velocidad (parámetro U) en la penetración de la carga en el interior del canal. La siguiente serie de figuras muestra el perfil de las cargas para valores de ϵ crecientes (0.1, 1, y 10).



$\epsilon = 0.1$



$\epsilon = 1$



$\epsilon = 10$

Se observa que, como cabía esperar, el aumento de la velocidad promedio del plasma se traduce en una mayor penetración en la pieza.

El último valor de ϵ, sin embargo, es excesivamente grande y extraño a los regímenes de operación normales. Para los dos casos anteriores, la penetración de la carga es realmente escasa, y la raíz del arco se encuentra muy cerca de la superficie de la pieza.

5. Resultados y conclusiones

Se estudia a continuación el efecto de dos gases de ignición en la soldadura: helio y argón. Las propiedades fundamentales (temperatura ambiente) se recogen en la siguiente tabla.

	Helio	Argón
densidad (Kg m^{-3})	0.16	0.57
viscosidad (Kg m^{-1} s^{-1})	$1.95 \cdot 10^{-5}$	$1.74 \cdot 10^{-5}$
1^{er} potencial de ionización (J)	$3.93 \cdot 10^{-18}$	$2.21 \cdot 10^{-18}$

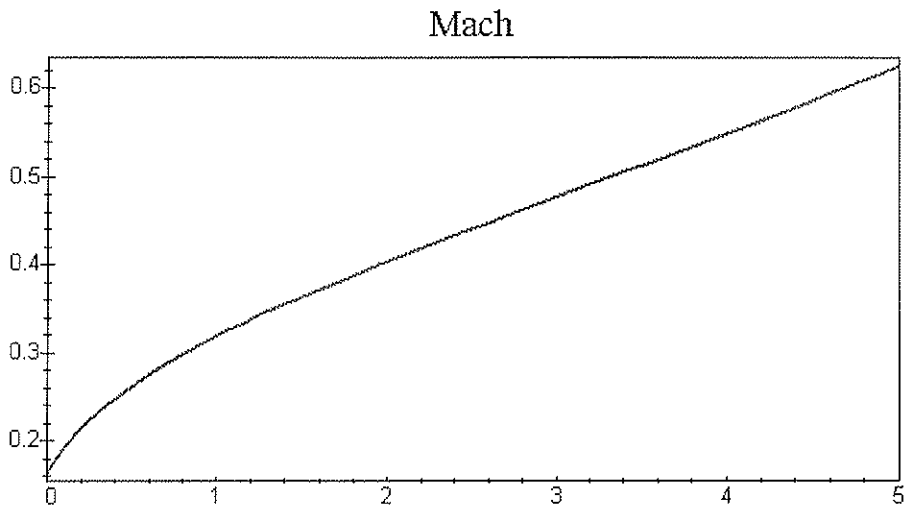
Se estudia en primer lugar su comportamiento en la zona interior del cátodo hueco. Después, su capacidad de transferencia de calor a la pieza y la penetración de la soldadura en la misma, así como la influencia en la estabilidad de la soldadura (raíz del arco).

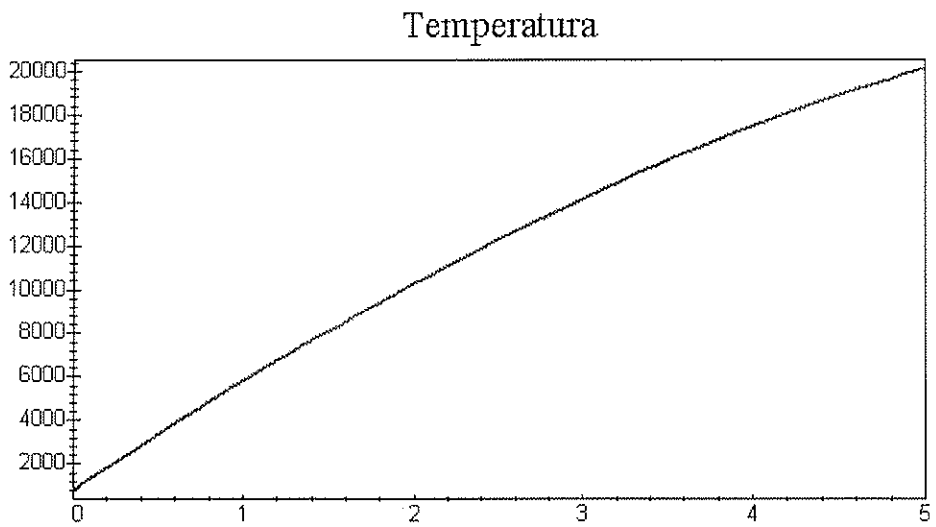
5.1 Cátodo hueco

Se muestra a continuación el efecto del gas usado en el calentamiento en el interior del cátodo hueco, y las densidades iónicas que se producen en cada caso.

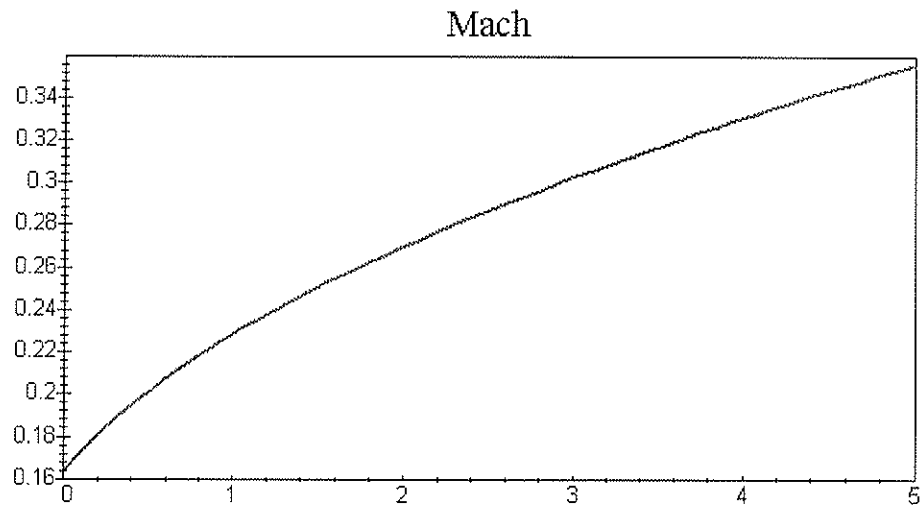
5.1.1 Velocidades y temperaturas

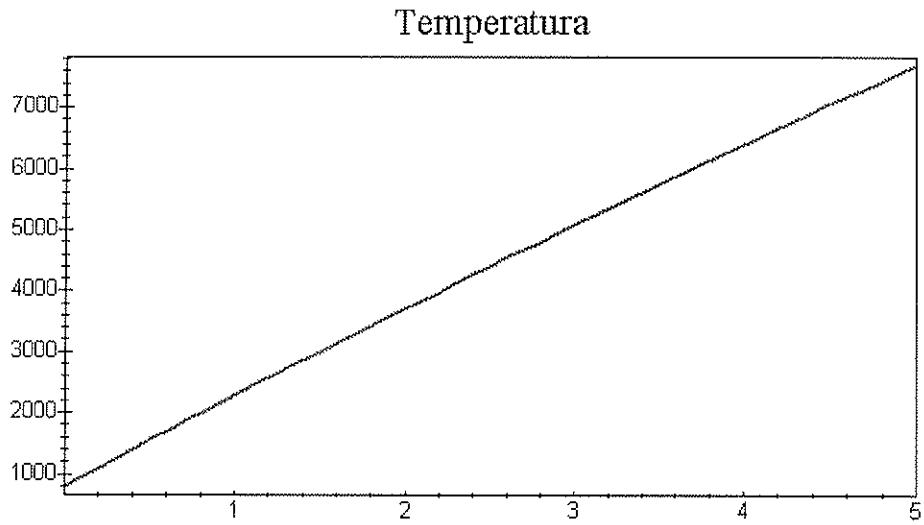
La siguientes gráficas muestran las velocidades (número de Mach) y temperaturas del gas Helio en el interior del cátodo. El gas entra por la parte superior del cátodo a 800 K y 100 m s^{-1}. La potencia del láser es de 800 W





Las mismas condicions de entrada y de potencia del haz se toman para obtener las gráficas para el Argón:

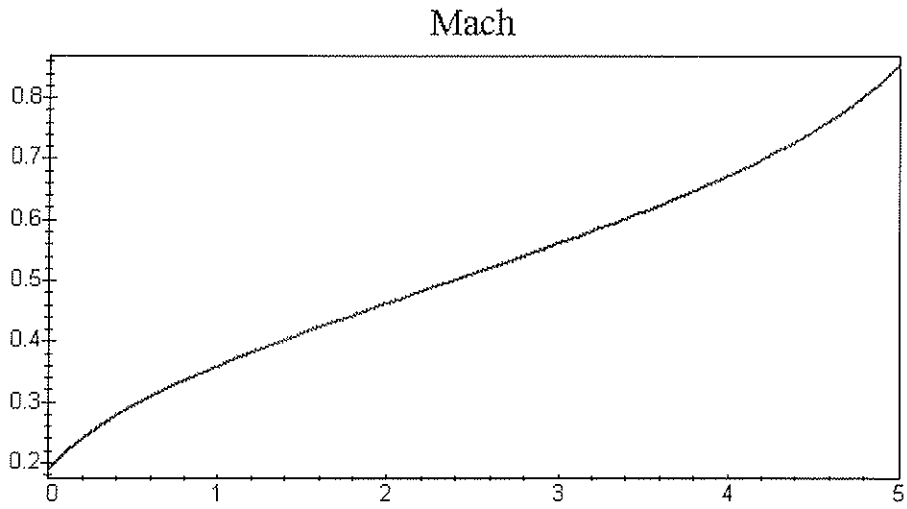


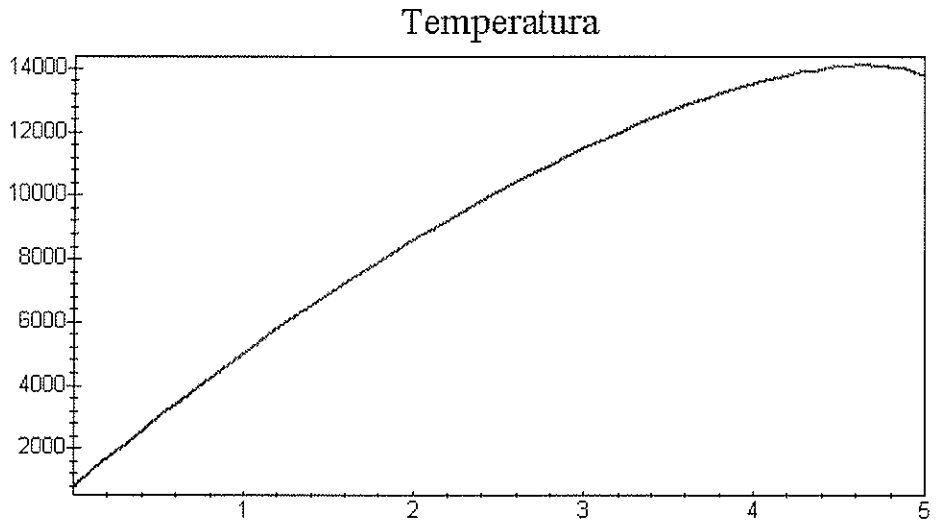


Se observa que el Argón se acelera significativamente menos que el Helio (menor densidad) y alcanza menor temperatura. De hecho, en el caso del Helio se alcanza una temperatura que permite mantener una ionización estable a los 2 mm de la boca del hueco del cátodo, mientras que la ionización del Argón no resultará significativa.

En principio parece adecuado, pues, usar Helio para aumentar el grado de ionización, favorecer el aumento de densidades iónicas y, en consecuencia, el

fenómeno termiónico y la consiguiente emisión de electrones. Sin embargo, aumentemos la velocidad de entrada de los gases ligeramente (hasta 120 m s^{-1}). Los perfiles del número de Mach y de la temperatura para el Helio son los siguientes:





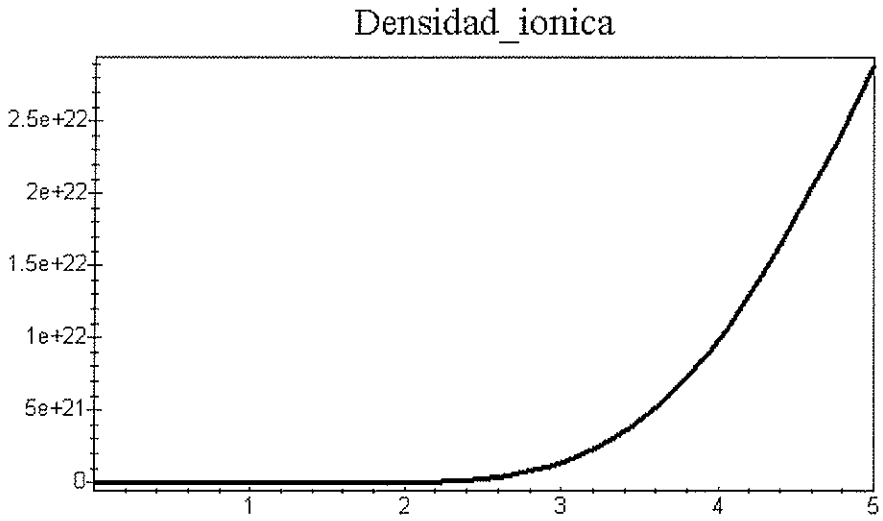
Es decir, se está al borde de provocar una onda de choque a la salida del hueco del cátodo. Además, existe un efecto de disminución de la temperatura

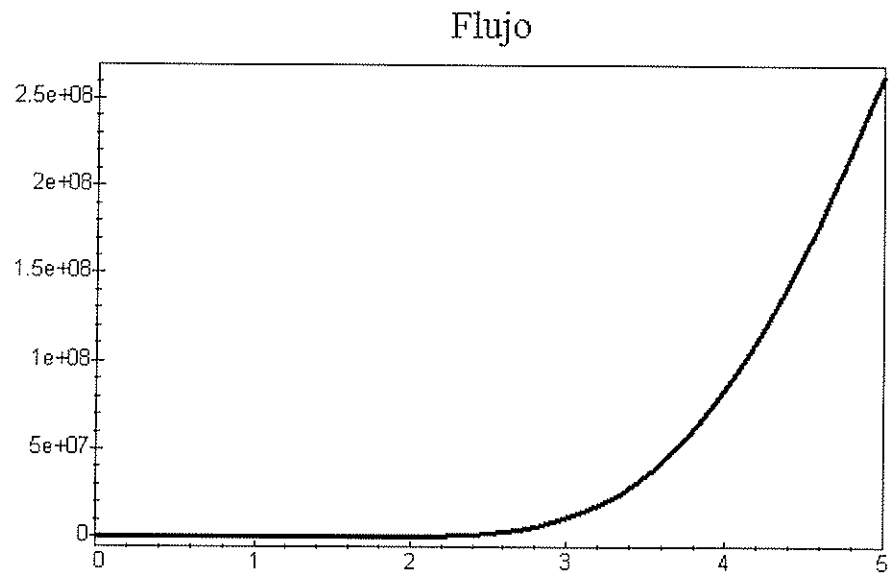
cuando el número de Mach cambia, efecto por lo demás indeseable al rebajar el contenido de especies iónicas en el gas.

El Argón, frente a este aumento de velocidad, se comporta de manera bastante más estable, sin apenas variaciones respecto de las gráficas anteriores.

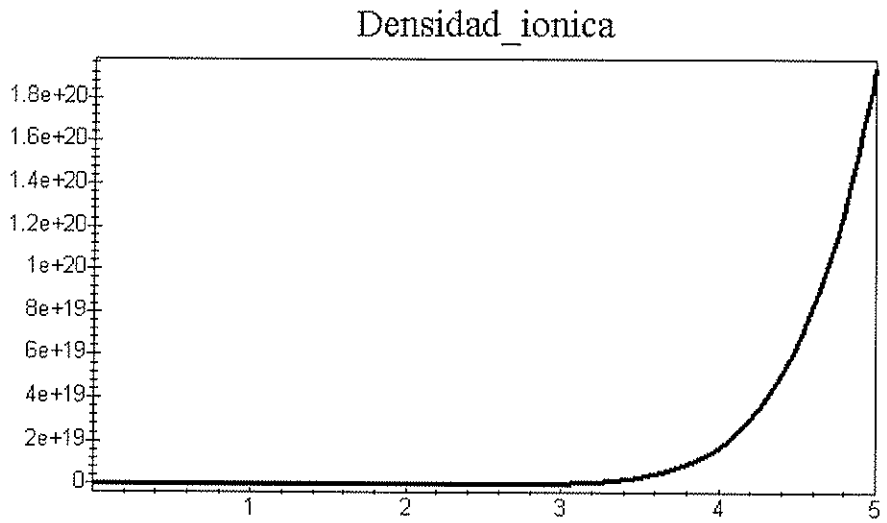
5.1.2 Ionización y flujo

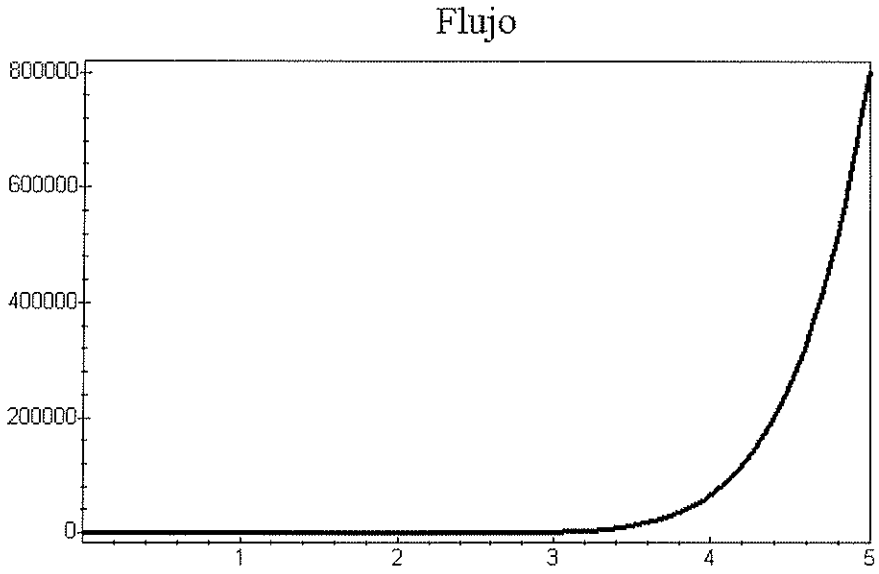
La siguientes gráficas muestran los grados de ionización del gas Helio en el interior del cátodo t el flujo de calor aportado a las paredes interiores del cátodo. El gas entra por la parte superior del cátodo a 800 K y 100 m s^{-1}. La potencia del láser es de 800 W.





Para las mismas condiciones, el RAgón arroja los siguientes resultados:

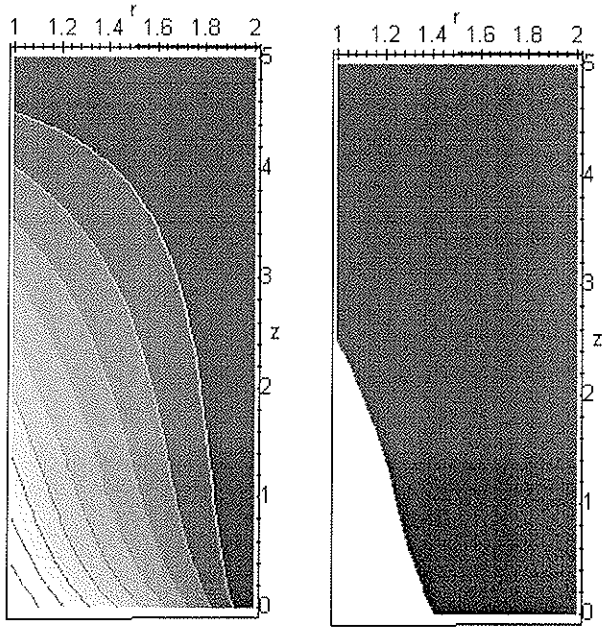




Esto es, las densidades iónicas decrecen en aproximadamente dos órdenes de magnitud, lo que provoca que el flujo de calor hacia las paredes del cátodo sea poco apreciable para el Argón (flujos por debajo de 10^6 W m^{-2} no van a producir calentamiento apreciable que genere emisión electrónica significativa).

5.1.3 Emisión electrónica

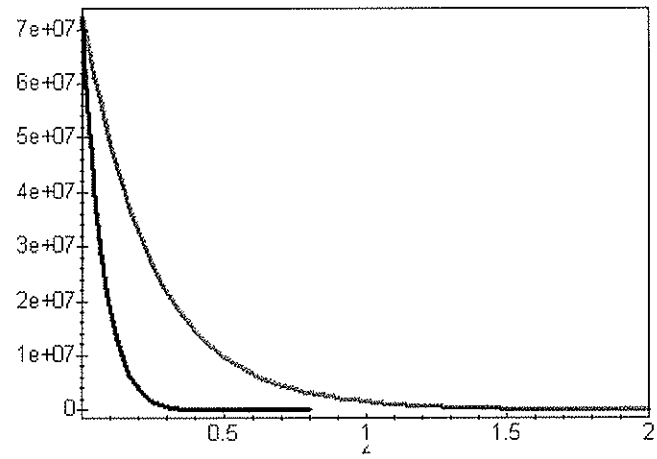
Los mapas de temperaturas del cátodo usando Helio o Argón en las condiciones anteriores son los siguientes



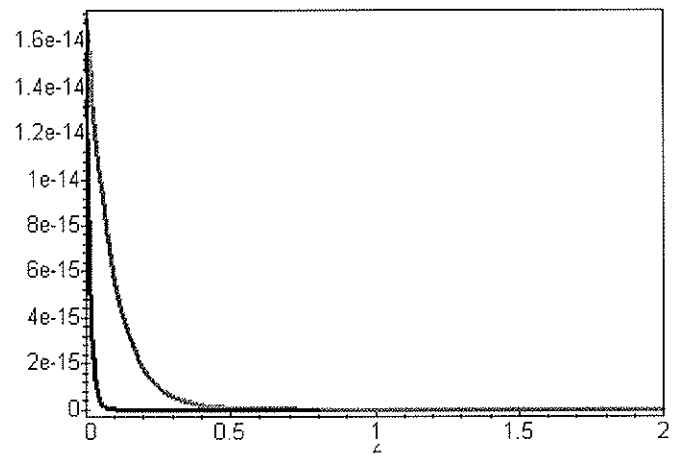
Helio Argón

Los contornos de las gráficas anteriores delimitan temperaturas por incrementos de 250 K respecto a la temperatura ambiente. En el caso del Helio, se alcanzan temperaturas superiores a los 2500 K en el borde inferior izquierdo, mientras que las temperaturas en el caso del argón rondan los 750 K.

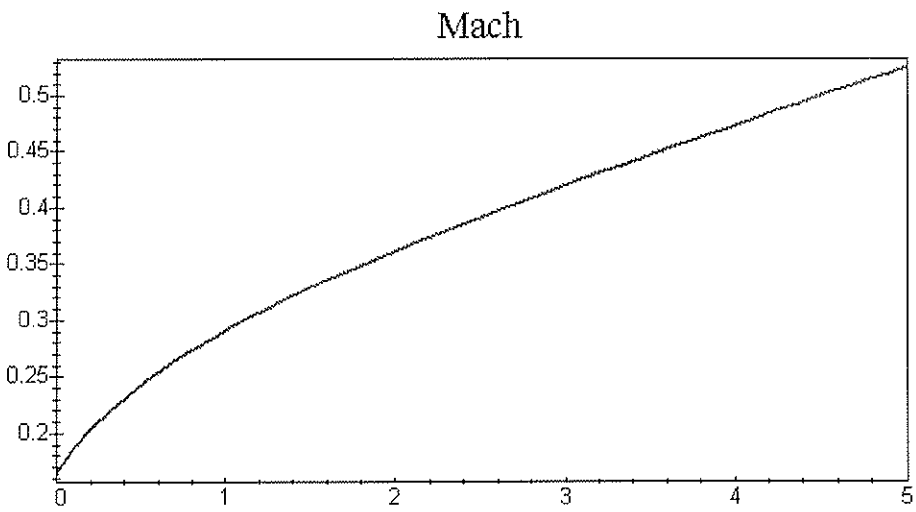
La densidades electrónicas generadas por el Helio tienen los perfiles:



El perfil interior corresponde a la emisión de corriente desde la superficie inferior del cátodo, y el exterior a las paredes internas del mismo. Para el Argón, los perfiles son los siguientes:

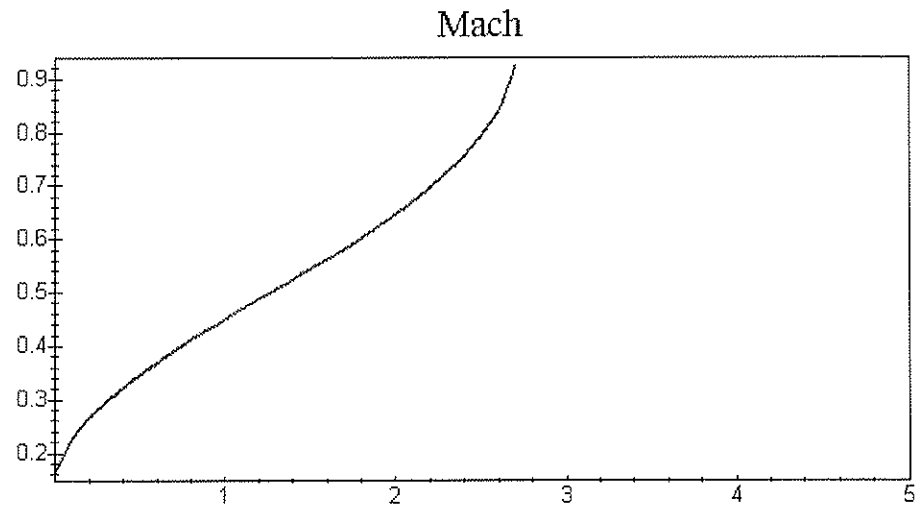


Esto es, la emisión electrónica es inexistente en la práctica. Para alcanzar, en las mismas condiciones de flujo, el mismo valor de emisión electrónica, se necesita un láser de 2100 W, casi el triple de la potencia necesaria con el Helio. Sin embargo, a este nivel de potencia el número de Mach del gas en el interior del cátodo se mantiene bien por debajo de 1, como se muestra en la siguiente gráfica:



Mach para el Argón con láser de 2100 W

mientras que, para el helio, esos niveles de potencia del haz láser conducirían a una aceleración excesiva del gas:



Mach para el Helio con láser de 2100 W

5.1.4 Resumen

Se concluye lo siguiente:

- El Helio, más ligero, se acelera con mayor facilidad dentro del cátodo hueco, y es por tanto más tendente a provocar inestabilidades por generación de onda de choque.
- A igual velocidad de entrada, la mayor densidad del Argón implica un mayor gasto másico. Si se fija la potencia del láser, el gasto másico es la cantidad que determina la fuente efectiva de calor en el seno del gas, de manera que un mayor gasto másico implica una fuente efectiva menor. Resulta, por tanto, más difícil calentar en Argón, y a potencias moderadas del haz láser (<1000 W) el Argón no alcanza una temperatura crítica de ionización estable.
- Para igualar la emisión de electrones con gas Argón a la del Helio debe aumentarse la potencia del láser. Se encuentra que, cuando estas emisiones son iguales, el Argón se comporta de manera más estable. Produce, por tanto, las mismas densidades iónicas en un rango de velocidades alejadas de Mach 1.

5.2 Arco de soldadura y baño fundido

El modelo bidimensional del arco a altas velocidades se va a aplicar al uso de los dos gases objeto de comparación.

Del modelo del cátodo hueco se extraen las siguientes condiciones de contorno:

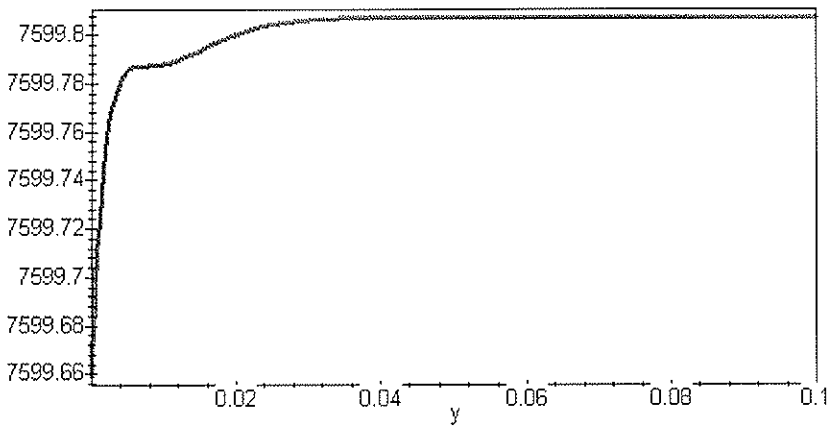
- Temperatura del plasma en la zona superior (promedio entre la temperatura de salida del hueco del cátodo y la temperatura ambiente).
- Intensidad electrónica.
- Velocidad de salida.

Asimismo, para unir después el mapa de temperaturas del arco con el mapa de temperaturas del ánodo, se ha supuesto la existencia de una capa límite que une ambas zonas con variación lineal de las temperaturas del plasma. Esta variación lineal debe ser *consistente* con la temperatura en la superficie

de la pieza, de manera que ambos problemas se deben resolver al mismo tiempo, de manera iterativa hasta alcanzar la condición de conservación de flujo en la superficie del metal a soldar.

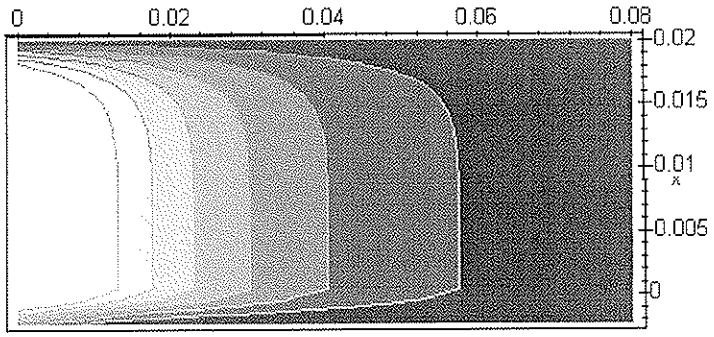
5.2.1 Mapas para el Argón

Para una potencia láser de 800 W y velocidad inicial del argón de 100 m s^{-1}, la ionización producida por el láser, tal y como se vio en las sección precedente, era prácticamente inexistente. La corriente tortal producida era muy escasa, y se espera que insuficiente para calentar adicionalmente la columna de plasma de manera significativa. En efecto, si se calcula la evolución de la temperatura promedio en el arco de plasma libre, se obtiene la figura

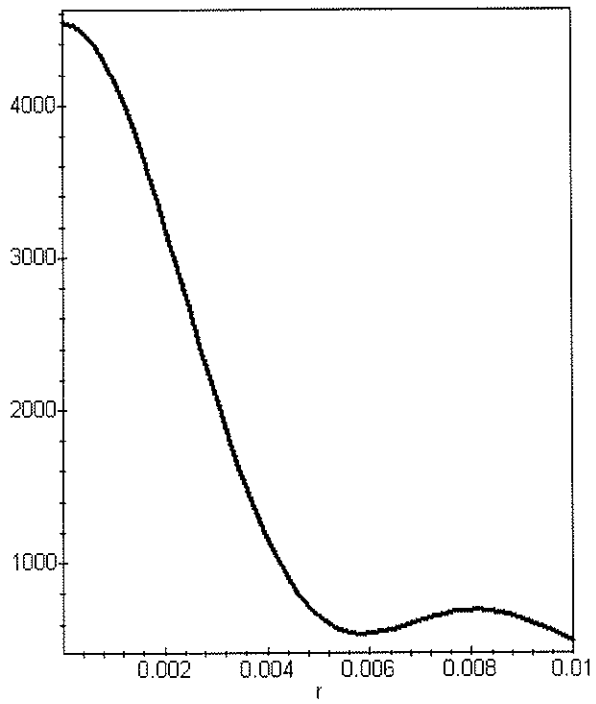


Es decir, un calentamiento adicional (sobre 7000 K, máximo en el interior de la columna) completamente despreciable, ineficaz para producir soldadura apreciable.

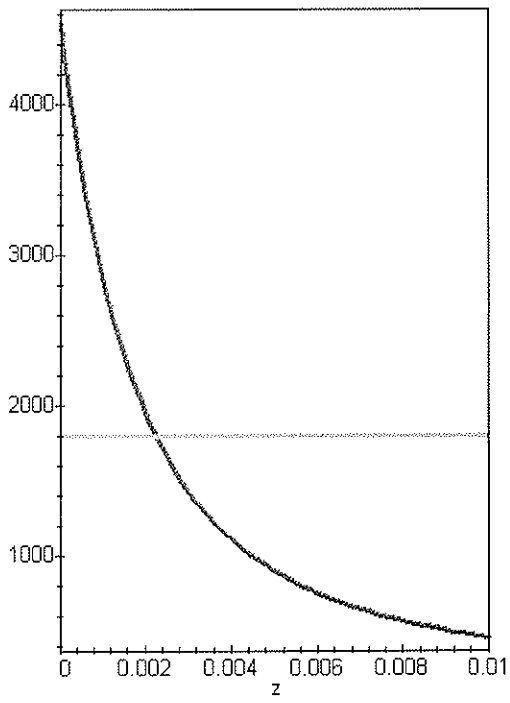
A 2000 W, sin embargo, el calentamiento de la columna es apreciable. Las siguientes gráficas muestran el resultado de iterar sobre los mapas de temperaturas en la columna de plasma y en el interior de la pieza.



Temperaturas del arco de plasma: contornos de 10 kK (exterior) a 20 kK (interior)



Temperatura en la superficie del ánodo para acero AISI 304. Por encima de los 3800 K se produce soldadura por penetración profunda.



Temperatura en el interior de la pieza en $r = 0$. La fusión se alcanza a los 1800 K. Penetración: 2.45 mm

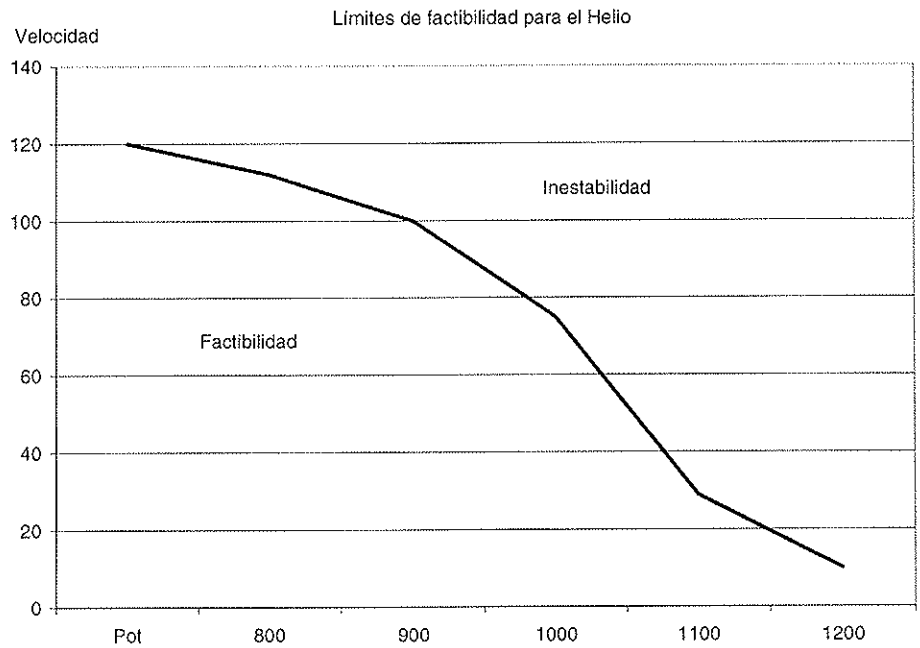
5.2.2 Mapas para el Helio

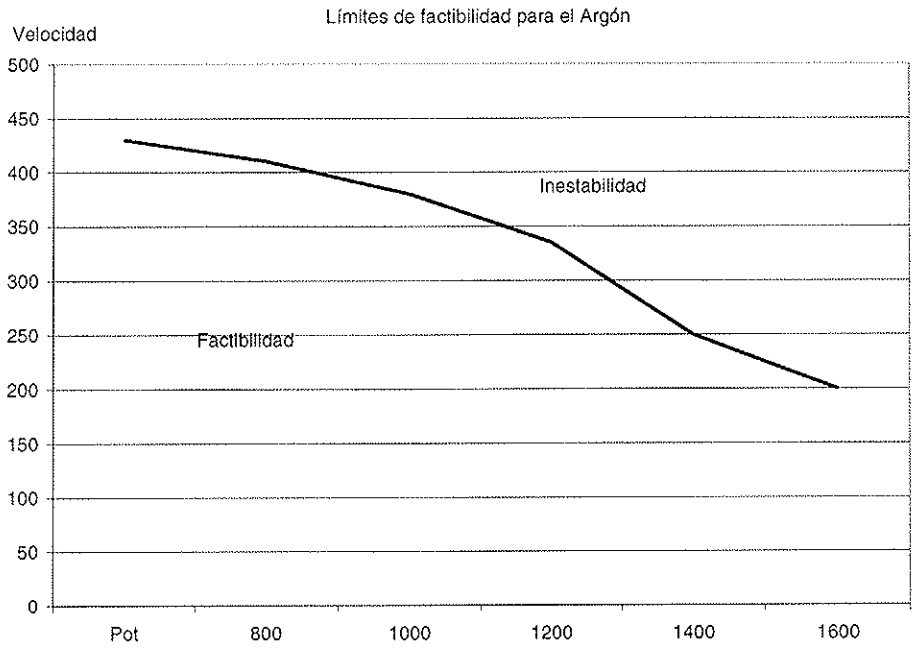
Para una potencia láser de 800 W y velocidad inicial del argón de 100 m s^{-1}, la ionización se hace notar en el caso del Helio. Los mapas para este gas con esas condiciones son muy similares a los obtenidos para el Argón y un láser de 2 kW.

Resulta, sin embargo, interesante el tabular el comportamiento del Helio en función de la potencia del láser y la velocidad de entrada por la parte superior del cátodo hueco, con el objeto de localizar las inestabilidades. La suguiente tabla recoge los resultados de penetración en la pieza a soldar en funci´pn de las condiciones de entrada, a presión ambiente.

Velocidad entrada gas (m/s)	Potencia láser (W)	Penetración (mm)
80	800	1.98
100	800	2.51
120	800	Inestable
80	1000	2.96
100	1000	Inestable
120	1000	Inestable

Como consecuencia de repetir estos cálculos, se puede construir diagramas de estabilidad Velocidad-Potencia para ambos tipos de gases, que permiten identificar las zonas de factibilidad de soldadura. Interpolando una curva de separación, se encuentra que los dominios de estabilidad vienen dados por las siguientes gráficas.





5.3 Conclusiones

Se resumen a continuación las conclusiones fundamentales a las que se ha llegado. Unas están referidas a la modelización y otras a los resultados concretos que se han obtenido.

Las conclusiones sobre los modelos empleados son las siguientes:

- A pesar de la complejidad del proceso de soldadura con arco asistido por láser, los modelos simplificados empleados capturan tendencias que permiten el estudio del proceso de forma parametrizada.
- El modelo del cátodo hueco ha abierto dos líneas de investigación a seguir, consideradas de interés:
  - Estudiar en detalle el problema inverso, es decir, ser capaz de reproducir con cierta exactitud el flujo de calor hacia las paredes internas del cátodo hueco a partir de medidas de temperatura en la parte sólida del cátodo. Si este método se desarrollara con éxito,

daría una información preciosa sobre el estado del gas en el hueco del cátodo, muy útil para predecir el grado de ionización real.

  - Analizar el problema dinámico de calentamiento del gas en el interior del cátodo hueco. El modelo propuesto es cuasi estacionario pero, para dar mayor precisión a los resultados, debe tenerse en cuenta la dinámica de calentemiento del gas y los estados de transición del mismo, especialmente de gas neutro caliente al estado de plasma estable.

- Los modelos de arco empleados, extensiones de modelos anteriores en los que el autor ha trabajado, pueden acoplarse a los modelos de cátodo hueco y del calentamiento del ánodo con éxito, a pesar de las hipótesis restrictivas de los mismos.

- El modelo de calentamiento del ánodo debe ser mejorado e incluir el cambio de fase y la generación del keyhole en el interior de la pieza a soldar.

Las conclusiones sobre los resultados concretos obtenidos son éstas:

- El Helio es un gas que tiende a producir más inestabilidades que el Argón, a igualdad de condiciones de temperatura y velocidad de entrada. Produce menos gasto (menos Kg m^{-2} s^{-1}) y en consecuencia tiende a calentarse más rápidamente, aunque su mayor potencial de ionización haga que el mantenimiento del plasma ionizado sea ligeramente más difícil.

- El Argón necesita más potencia del láser para generar iones de manera apreciable, a iguales condiciones de temperatura y velocidad de entrada. Su mayor densidad hace que el gasto de entrada sea mayor (más masa por unidad de tiempo y sección a calentar y, en consecuencia, menor calentamiento). En cualquier caso, resulta más estable que el Helio para las mismas o similares producciones iónicas (que se alcanzan, eso sí, para potencias del haz láser sustancialmente mayores).

- El factor de potencia del láser por el que hay que multiplicar la potencia usada con Helio para producir soldadura apreciable con el Argón es de aproximadamente 2.6, aunque depende de la velocidad de entrada.

- Como consecuencia de todo lo anterior, se tiene:

- A bajas potencias del láser (menores que 1000 W) y para igualdad de velocidades y temperaturas de los gases (calentados alrededor de 500-800 K y para velocidades menores de 100 m s^{-1}), la única alternativa viable es el uso del Helio.
- A potencias mayores de 1000 W, el comportamiento del Helio tiende a generar ondas de choque en el interior del cátodo hueco, por lo que se prefiere el uso de Argón, más estable.

- El empleo de un láser tiene un efecto despreciable sobre el balance de calor en la superficie de la pieza, debido fundamentalmente a la desfocalización. Sin embargo, juega un papel muy importante en la ignición del gas aguas arriba, y contribuye a vencer el potencial de salto que se crea cerca de la superficie de la pieza.
- El aumento de la presión exterior tiende a estabilizar el comportamiento del gas en el interior del cátodo hueco. Sin embargo, elementos que no se han tenido en cuenta en el modelo (esencialmente, la generación de vórtices turbulentos con el aumento de la presión) pueden jugar en sentido contrario. Asimismo, la variación de la caída de potencial con la presión ambiente puede tener efectos indeseables sobre el aspecto final de la soldadura.

6. Referencias

1. Farmer A. J. D., Haddad G. N. and Cram L. E., 1986, J. Phys. D: Appl. Phys, **19**, 1723-1730.
2. Farmer A. J. D., Haddad G. N. and Kovitya P., 1988, J. Phys. D: Appl. Phys, **21**, 432-436
3. Zhu P., Lowke J. J. and Morrow R., 1992, J. Phys. D: Appl. Phys, **25**, 1221-1230.
4. Ducharme R., Kapadia P., Dowden J., Richardson I and Thornton M., 1996, J. Phys. D.: Appl. Phys., **29**, 2650-2658
5. Blundell R. E. and Fang M. T. C., 1997, J. Phys. D.: Appl. Phys., **30**, 628-635.
6. Haidar J., Farmer A. J. D., 1994, J. Phys. D.: Appl. Phys, **27**, 555-560.
7. Sadek A. A., Ushio M. and Matsuda F., 1990, Metallurgical Transactions A, **21A**, 3221-3236
8. Benilov M. S. and Marotta A., 1995, J. Phys. D.: Appl. Phys., **28**, 1869-1882.
9. Dowden J. and Kapadia P., 1994, J. Phys. D.: Appl. Phys, **27**, 902-910
10. Solana P., Kapadia P., Dowden J., 1998, J. Phys. D.: Appl. Phys, **31**, 3446-3456
11. Solana P., Kapadia P., Dowden J., 1999, J. Phys. D.: Appl. Phys, **32**, 2529-2536
12. Biel W., Bröse M., David M., Kempkens H and Uhlenbusch J., 1997, Plasma Phys. Control. Fusion, **39**, 661-681.
13. Broglia M., Cantoni F., Montone A and Zampetti P., 1987, Phys. Rev. A, **36**, 705-714.

14. Stockhausen G., Mende W. and Kock M., 1996, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **29**, 6665-675.

15. Carslaw H. S. and Jaeger J. C., 1959, Conduction of Heat in Solids. Clarendon Press, Oxford.

16. Yang Y., Hsu P. and Chen C., 1997, J. Phys. D: Appl. Phys., **30**, 1326-1333.

17. Zheng H. and Murio D. A., 1996, Computer Math. Applic., **31**, 1-14.

18. Crespo A., 1993, Mecánica de Fluidos. ETSII Publicaciones, Madrid.

19. Abramowitz M. and Stegun I. A., 1965, Handbook of mathematical functions, Washington D.C.: National Bureau of Standards.

7. Programas de cálculo

7.1 Calentamiento metal del cátodo

```
# Flujo en la cara inferior
# Primer autovalor
> l1:=1.787:
> q0:=1:
> L=5:
> a:=1:
> b:=2:
> U:=r->BesselJ(0,l1*r)*BesselY(1,l1*a)-BesselY(0,l1*r)*BesselJ(1,l1*a):
> N:=evalf(int(rho*(U(rho))^2, rho=1..2)):
> C:=(q0/(l1*N))*evalf(int(rho*U(rho),rho=1..2)):
> inn:=C/q0:
# segundo autovalor
> l2:=4.803:
> U2:=r->BesselJ(0,l2*r)*BesselY(1,l2*a)-BesselY(0,l2*r)*BesselJ(1,l2*a)
> :
> N2:=evalf(int(rho*(U2(rho))^2, rho=1..2)):
> C2:=(q0/(l2*N2))*evalf(int(rho*U2(rho),rho=1..2)):
> inn2:=C2/q0:
> with(plots):
> t1:=(r,z)->C2*U2(r)*exp(-l2*z)+C*U(r)*exp(-l1*z):
```

```
> plot3d(t1(r,z), r=1..2, z=0..5, axes=boxed);
> contourplot(t1(r,z), r=1..2, z=0..5, contours=[0.5,1,1.5,2,2.5,3],
> filled=true, axes=boxed);
# Flujo en la cara interna
# Primer autovalor
> L:=5:
> m1:=Pi/(2*L):
> q0:=1:
> S:=r->BesselK(0,m1*b)*BesselI(0,m1*r)-BesselI(0,m1*b)*
> BesselK(0,m1*r):
> Sp:=r->m1*BesselK(0,m1*b)*BesselI(1,m1*r)+BesselI(0,m1*b)*
> BesselK(0,m1*r)*m1:
> que:=z->0.5*(1-(1/5)*z):
> ii:=evalf(int(que(z)*cos(m1*z),z=0..L)):
>
> Dee:=evalf(2*ii/(Sp(a)*m1*L)):
# Segundo autovalor
> m2:=(Pi+2*Pi)/(2*L):
>
> S2:=r->BesselK(0,m2*b)*BesselI(0,m2*r)-BesselI(0,m2*b)*
> BesselK(0,m2*r):
> Sp2:=r->m2*BesselK(0,m2*b)*BesselI(1,m2*r)+BesselI(0,m2*b)*
>BesselK(0,m2*r)*m2:
> que:=z->0.5*(1-(1/5)*z):
> ii2:=evalf(int(que(z)*cos(m2*z),z=0..L)):
```

```
>
> Dee2:=evalf(2*ii2/(Sp(a)*m2*L)):
> t2:=(r,z)->-S(r)*cos(m1*z)*Dee-S2(r)*cos(m2*z)*Dee2:
> plot3d(t2(r,z), r=1..2, z=0..5, axes=boxed):
# Mapa total
> temp:=(r,z)->t1(r,z)+t2(r,z):
> contourplot(temp(r,z), r=1..2, z=0..5,
> contours=[0.25,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75,2,2.25], filled=true,
> axes=boxed);
> ec:=1.6022*10^(-19):
> h:=6.6261*10^(-34):
> hcor:=1.0546*10^(-34):
> kB:=1.3807*10^(-23):
> me:=9.1094*10^(-31):
> mFe:=9.2690*10^(-26):
> phi:=2.63:
> Aric:=3*10^4:
> fRich1:=r->phi*Aric*1600^2*temp(r,0)*temp(r,0)*exp(-25/temp(r,0)):
> plot(fRich1(r),r=1..1.8);
>
>
>
# Problema inverso
# Entrada de temperaturas en r's y z's.
> z1:=1:
```

```
> z2:=1.5:
> z3:=2.1:
> z4:=2.5:
> r1:=1:
> r2:=1.5:
> r3:=1.6:
> r4:=1.7:
> T1:=evalf(temp(r1,z1)):
> T2:=evalf(temp(r2,z2)):
> T3:=evalf(temp(r3,z3)):
> T4:=evalf(temp(r4,z4)):
# Ecuaciones
> with(linalg):
> A:=evalf(matrix(4,4,[U(r1)*exp(-l1*z1),U2(r1)*exp(-l2*z1),
> S(r1)*cos(m1*z1),S2(r1)*cos(m2*z1),U(r2)*exp(-l1*z2),U2(r2)*
>exp(-l2*z2),S(r2)*cos(m1*z2),S2(r2)*cos(m2*z2),U(r3)*exp(-l1*z3),
>U2(r3)*exp(-l2*z3),S(r3)*cos(m1*z3),S2(r3)*cos(m2*z3),U(r4)*
>exp(-l1*z4),U2(r4)*exp(-l2*z4), S(r4)*cos(m1*z4),S2(r4)*
> cos(m2*z4)])):
> sv:=singularvals(A):
> ccond:=sv[4]/sv[1]:
> B:=inverse(A):
> Constantes:=evalm(B&*matrix(4,1,[T1,T2,T3,T4])):
> qotest:=Constantes[1,1]/inn:
> qotest:=Constantes[2,1]/inn2:
```

```
# Flujo interno
> flux:=z->-m1*Sp(1)*Constantes[3,1]*cos(m1*z)-m2*Sp2(1)*Constantes[4,1]
> *cos(m2*z):
> pq1:=plot(flux(z),z=0..5, color=khaki,thickness=2):
> pq2:=plot(0.5*(1-(1/5)*z),z=0..5, color=blue,thickness=2):
> display({pq1,pq2},axes=boxed);
>
```

7.2 Flujo del gas en el interior del cátodo

```
######### Flujo isentrópico en el cátodo hueco ##
> restart:
> with(plots):
> Dd:=0.001:
> LL:=0.005:
> Cp:=200:
> G:=5/3:
> V0:=130:
> T0:=800:
> R:=280:
> v0:=evalf(V0^2/(G*R*T0));
> fin:=5:
> Pot:=600:
> alpha:=450:
> ata:=10:
> rho:=1.6*ata:
```

```
> C:=evalf(V0*rho);
> q:=evalf(Pot*4*(1-exp(-alpha*LL))/(C*LL*Pi*Dd^2));
> sound:=evalf(sqrt(G*R*T0));
>
v0 := .04526785714
C := 2080.0
8
q := .6571390868 10
sound := 611.0100925
@@@@@@@@@@@@@ Se integran las ecuaciones numéricamente:
> q:=q;
> eqs1:=(1/Dd)*Cp*diff(T(z),z)+(1/(2*Dd))*diff(V(z)*G*R*T(z),z)=q:
> eqs2:=(1/2)*(1-V(z))*diff(V(z),z)=(G-1)*Dd*q*V(z)/(G*R*T(z)):
> soli3:=dsolve({eqs1, eqs2, V(0)=v0, T(0)=T0},{V(z),T(z)}, 'numeric');
> soli3(5);
> Tempe3:=t->rhs( op(2,soli3(t) ) ):
> Velox3:=t->sqrt(rhs( op(3,soli3(t) ) )):
> p3:=plot(Tempe3, 0..fin, title='Temperature', axes=boxed):
> pv3:=plot(Velox3, 0..fin, title='Velocity', axes=boxed):
> q:=q/2;
> eqs1:=(1/Dd)*Cp*diff(T(z),z)+(1/(2*Dd))*diff(V(z)*G*R*T(z),z)=q:
> eqs2:=(1/2)*(1-V(z))*diff(V(z),z)=(G-1)*Dd*q*V(z)/(G*R*T(z)):
> soli4:=dsolve({eqs1, eqs2, V(0)=v0, T(0)=T0},{V(z),T(z)}, 'numeric');
> Tempe4:=t->rhs( op(2,soli4(t) ) ):
> Velox4:=t->sqrt(rhs( op(3,soli4(t) ) )):
```

```
> p4:=plot(Tempe4, 0..fin, title='Temperature', axes=boxed):
> pv4:=plot(Velox4, 0..fin, title='Velocity', axes=boxed):
> q:=q/2;
> eqs1:=(1/Dd)*Cp*diff(T(z),z)+(1/(2*Dd))*diff(V(z)*G*R*T(z),z)=q:
> eqs2:=(1/2)*(1-V(z))*diff(V(z),z)=(G-1)*Dd*q*V(z)/(G*R*T(z)):
> soli5:=dsolve({eqs1, eqs2, V(0)=v0, T(0)=T0},{V(z),T(z)}, 'numeric');
> Tempe5:=t->rhs( op(2,soli5(t) ) ):
> Velox5:=t->sqrt(rhs( op(3,soli5(t) ) )):
> p5:=plot(Tempe5, 0..fin, title='Temperatura', axes=boxed):
> pv5:=plot(Velox5, 0..fin, title='Velocidad', axes=boxed):
> with(plots):
> display({p3,p4,p5}, thickness=2);
> display({pv3,pv4,pv5}, thickness=2);
> evalf(100/sqrt((5/3)*280*300));
> ec:=1.6022*10^(-19):
> h:=6.6261*10^(-34):
> hcor:=1.0546*10^(-34):
> kB:=1.3807*10^(-23):
> me:=9.1094*10^(-31):
> mFe:=9.2690*10^(-26):
> p:=10^5:
> Ioni:=1.265*10^(-18):
> Volt:=10:
> Kp:=Tem->2*kB*Tem*sqrt((me*kB*Tem/h^2)^3)*exp(-Ioni/(kB*Tem));
> inter:=Tem->(p+Kp(Tem))/(kB*Tem);
```

```
> rho:=Tem->(inter(Tem)-sqrt(inter(Tem)*(inter(Tem)-p/(kB*Tem))))*mFe;
> Kp5:=t->2*kB*Tempe5(t)*sqrt((me*kB*Tempe5(t)/h^2)^3)*
>exp(-Ioni/(kB*Tempe5(t))):
> inter5:=t->(p+Kp5(t))/(kB*Tempe5(t)):
> rho5:=t->(inter5(t)-sqrt(inter5(t)*(inter5(t)-p/(kB*Tempe5(t)))))*mFe:
> ni5:=t->-Kp5(t)/(kB*Tempe5(t))+sqrt(Kp5(t)/(kB*Tempe5(t))*
>(Kp5(t)/(kB*Tempe5(t))+4*rho5(t)/mFe));
> Kp4:=t->2*kB*Tempe4(t)*sqrt((me*kB*Tempe4(t)/h^2)^3)*
> exp(-Ioni/(kB*Tempe4(t))):
> inter4:=t->(p+Kp4(t))/(kB*Tempe4(t)):
> rho4:=t->(inter4(t)-sqrt(inter4(t)*(inter4(t)-p/(kB*Tempe4(t)))))*mFe:
> ni4:=t->-Kp4(t)/(kB*Tempe4(t))+sqrt(Kp4(t)/(kB*Tempe4(t))*
>(Kp4(t)/(kB*Tempe4(t))+4*rho4(t)/mFe)):
> Kp3:=t->2*kB*Tempe3(t)*sqrt((me*kB*Tempe3(t)/h^2)^3)*
> exp(-Ioni/(kB*Tempe3(t))):
> inter3:=t->(p+Kp3(t))/(kB*Tempe3(t)):
> rho3:=t->(inter3(t)-sqrt(inter3(t)*(inter3(t)-p/(kB*Tempe3(t)))))*mFe:
> ni3:=t->-Kp3(t)/(kB*Tempe3(t))+sqrt(Kp3(t)/(kB*Tempe3(t))*
>(Kp3(t)/(kB*Tempe3(t))+4*rho3(t)/mFe)):
>
> plot({ni4,ni3},0..5,color=black, thickness=2, axes=boxed,
> title=Densidad_ionica);
> vBohm5:=t->sqrt(kB*Tempe5(t)/mFe):
> vBohm4:=t->sqrt(kB*Tempe4(t)/mFe):
> vBohm3:=t->sqrt(kB*Tempe3(t)/mFe):
```

```
> qu5:=t->ec*ni5(t)*vBohm5(t)*(10+Ioni/ec-1.63):
> qu4:=t->ec*ni4(t)*vBohm4(t)*(10+Ioni/ec-1.63):
> qu3:=t->ec*ni3(t)*vBohm3(t)*(10+Ioni/ec-1.63):
> plot({qu4,qu3},0..5, axes=boxed,thickness=2,color=black,title=Flujo);
>
```

7.3 Modelos del arco

7.3.1 Modelo a bajas velocidades

Modelo del arco unidimensional

```
> restart;
```

Constantes

```
> k:=1.380662*10^(-23):
> Ion:=2.524*10^(-18):
> epsilon0:=8.85419*10^(-12):
> b:=0.005:
> eta0:=10^(-4):
> mn:=6.6224*10^(-26):
> Cp:=5*k/(2*mn):
> rhoU:=10:
> J:=1.135*10^7:
> T0:=3000:
> Tad:=Ion/(20*k):
> sigmaad:=epsilon0*V0/b^2:
> Jad:=J*sqrt(20*k*eta0*b/(Cp*rhoU*Ion)):
> V0ad:=sqrt(20*k/(eta0*b*Cp*rhoU*Ion)):
```

```
> Kcond:=44:
```

Función de resistividad

```
> eta:=T->5.24092*(T)^4*exp(10*(1/(T)-1)):
> difeta:=T->20.96368*T^3*exp(10/T-10)-52.40920*T^2*exp(10/T-10):
```

Obtención de la caída de potencial en el arco

```
> ecuV0:=Jad^2=int(1/eta(T),T=T0/Tad..T0/Tad+xc*Jad):
> V0:=solve(ecuV0,xc)/V0ad;
```

Representación gráfica

```
> with(plots):
> plot(eta(T/Tad), T=T0..3*Tad,axes=boxed,thiockness=3,color=marron);
> implicitplot(int(1/eta(T),T=T0/Tad..Tp/Tad)=(Jad)^2*(1+x/b),x=-b..0,Tp
>=T0..3*Tad,axes=boxed,grid=[35,35],thickness=3,color=red);
> implicitplot(int(1/eta(T),T=T0/Tad..T0/Tad+V0*V0ad*Jad*(Vp/V0+1))=
> (Jad)^2*(1+x/b),x=-b..0,Vp=-V0..0,axes=boxed,grid=[35,35],
> thickness=3,color=blue);
>
```

7.3.2 Modelo de arco a altas velocidades

```
> restart;
>
> orif:=0.0005:
> epsilon0:=8.85419*10^(-12):
> eta0:=10^(-4):
> U:=5000:
> gasto:=1000:
> b:=0.02:
```

```
> T0:=7000:
> V0:=-20:
> mu0:=4*Pi*10^(-7):
> Cp:=200:
> alpha:=mu0*U/eta0:
> ec:=exp((1/2)*(x-sqrt(x+4*alpha))*b)-exp((1/2)*
> (x+sqrt(x+4*alpha))*b)=V0:
> fdr:=fsolve(ec,x);
> V:=(x,y)->exp(-sqrt(abs(fdr))*y)*(exp((1/2)*(fdr-sqrt(fdr+4*alpha))*
>(-x))-exp((1/2)*(fdr+sqrt(fdr+4*alpha))*(-x))):
> betaco:=U*mu0/eta0;
> B:=(x,y)->(V0/U)*betaco^2*y*exp(betaco*x)/(1-exp(-betaco*b)):
>B1:=(x,y)->(1/1000)*(mu0*sqrt(abs(fdr))/eta0)*exp(-sqrt(abs(fdr))*y)
>*(((-1/2)*(fdr-sqrt(fdr+4*alpha)))*
>exp((1/2)*(fdr-sqrt(fdr+4*alpha))*(-x))+((1/2)*(fdr+sqrt(fdr+4*alpha)))*
>exp((1/2)*(fdr+sqrt(fdr+4*alpha))*(-x))):
> der:=(x,y)->(D[1](V)(x,y))^2:
> T:=(x,y)->T0+(int(1/(eta0*gasto*Cp)*(der(ex,y))^1,ex=-b..x));
> jx1:=(x,y)->(1/mu0)*D[2](B)(x,y):
> jy1:=(x,y)->(-1/mu0)*D[1](B)(x,y):
> jx:=(x,y)->(-1/eta0)*D[1](V)(x,y):
> jy:=(x,y)->(-1/eta0)*D[2](V)(x,y)-U/eta0*B(x,y):
> modj:=(x,y)->sqrt(jx(x,y)^2+jy(x,y)^2):
> sigmac:=(x,y)->epsilon0*(diff(V(x,y),x,x)+diff(V(x,y),y,y)):
>
```

```
> evalf(jy(-b,0));
> j0:=evalf(sqrt(jx(-b,0)^2+jy(-b,0)^2));
> J:=evalf(j0*Pi*orif^2);
> with(plots):
> edi:=b/2:
> plot(V(x,0),x=-b..0,axes=boxed,thickness=3,title=Voltaje);
> plot3d(sigmac(x,y),x=-b..0,y=0..b,axes=boxed,title=sigma);
> plot3d(jx(x,y),x=-b..0,y=0..b,axes=boxed,title=jx);
> contourplot(T(x,y),x=-b..0,y=0..5*b,axes=boxed,filled=true,title=T);
> plot3d(T(x,y),x=-b..0,y=0..5*b,axes=boxed,title=T);
> plot3d(jy(x,y),x=-b..0,y=0..b,axes=boxed,title=jy);
> plot3d(B(x,y),x=-b..0,y=0..b,axes=boxed,title=B);
> contourplot(modj(x,y),x=-b..0,y=0..b/5,axes=boxed);
> cap:=b/3:
> Tmax:=2000:
> Temper:=y->T(0,y):
> plot(Temper(y),y=0..5*b);
> TT:=yy->7000+Tmax*exp(-yy^2/10^(-4));
> Tpl:=(x,y)->Temper(y)+(TT(y)-Temper(y))/cap*x;
> Tplcorr:=(x,y)->piecewise(x<0,0,x>0,Tpl(x,y));
> Tcorr:=(x,y)->piecewise(x<0,T(x,y),x>0,0);
> Tcompleta:=(x,y)->Tplcorr(x,y)+Tcorr(x,y);
> contourplot(Tcompleta(x,y),x=-b..cap,y=0..5*b,axes=boxed);
> plot(TT(yy),yy=0..0.05);
>
```